Diplomarbeit

Optimale Kontrolle der Landau-Lifschitz-Gilbert Gleichung

Ailyn Schäfer

Tübingen, den 25. März 2013

Betreuer: Prof. Dr. Andreas Prohl

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Fachbereich Mathematik

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Motivation dieser Arbeit ist der Wunsch, die Magnetisierung eines Ferromagneten durch eine äußere Kraft, beispielsweise ein elektrisches Feld, auf optimale Art und Weise kontrollieren und manipulieren zu können. Dabei verfolgen einige technische Bereiche aktuell den Ansatz den Ferromagneten auf der mikroskopischen Ebene zu untersuchen, da so etwa gewünschte Umklapp-Prozesse von Magnetisierungen, die in Speichermedien mit Schreib- und Leseprozessen einhergehen, erzielt und verbessert werden können ([LFv11, BFG+09]).

In der vorliegenden Arbeit erfüllt das magnetische Moment $\boldsymbol{m} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Landau-Lifschitz-Gilbert Gleichung (LLG),

$$\boldsymbol{m}_t = -\alpha \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}) \tag{0.1}$$

mit Anfangszustand $\boldsymbol{m}(0) = \boldsymbol{m}_0$ und $T > 0$, wobei $\alpha > 0$ eine im Allgemeinen sehr kleine Dämpfungskonstante ist, $\boldsymbol{u} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Rolle einer externen Kraft übernimmt und Ω ein beschränktes Gebiet sei, das der Ferromagnet einnimmt. Für einen Überblick zur Modellierung von Ferromagneten und bekannten Resultaten wird auf [Pro01, KP06] und deren Referenzen verwiesen. Man beachte, dass die externe Kraft $\boldsymbol{u}$, die über das effektive Feld $\mathrm{H}_{\mathrm{eff}}$ wirkt, wegen mathematischer Schwierigkeiten nur im Präzisionsterm $\boldsymbol{m} \times \mathrm{H}_{\mathrm{eff}}$ betrachtet wird. Aus Sicht der Modellierung lässt sich dies vertreten, da $\alpha > 0$ sehr klein und damit der Anteil der Kontrolle im Dämpfungs-Term vernachlässigbar ist. Zudem wird im effektiven Feld $\mathrm{H}_{\mathrm{eff}}$ nur die Austauschenergie untersucht und Effekte, die aus der magnetischen Anisotropie und der magnetischen Streufeld- bzw. Entmagnetisierungsenergie entstehen, werden außer Acht gelassen.

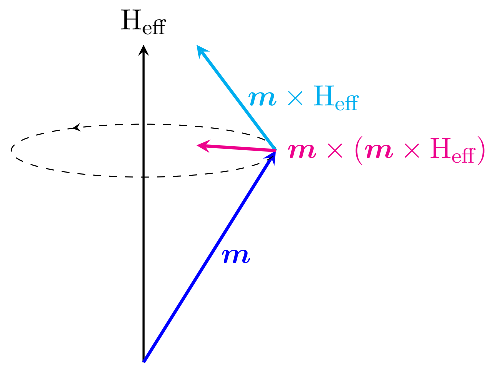

Abbildung 0.1: Bewegung der Magnetisierung $\boldsymbol{m}$, die Gleichung (0.1) löst.

Elementar geometrisch lässt sich der Dämpfungsterm $\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m})$ als Projektion von $\Delta \boldsymbol{m}$ auf die Sphäre interpretieren (vgl. für $\mathrm{H}_{\mathrm{eff}} = \Delta \boldsymbol{m}$ auch Abbildung 0.1), was mit dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator $|\nabla \boldsymbol{m}|^2$ die Gleichheit $-\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}) = \Delta \boldsymbol{m} + |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m}$ ergibt und somit zu einer äquivalenten Umformulierung der LLG (0.1),

$$\boldsymbol{m}_t - \alpha \Delta \boldsymbol{m} = \alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}), \tag{0.2}$$

führt (vgl. Lemma 1.4). Diese Formulierung der LLG mit ihrer semilinearen Struktur erweist sich als geeigneter um höhere Regularitätseigenschaften der Lösung nachzuweisen und wird im Folgenden insbesondere bei der Herleitung von notwendigen Optimalitätsbedingungen relevant sein.

Ziel dieser Arbeit ist ein Optimalitätsproblem für die LLG zu formulieren, die Existenz eines Minimums zu beweisen und für dieses notwendige Optimalitätsbedingungen herzuleiten sowie Lösungen vermittels einer Zeitdiskretisierung praktisch zu konstruieren. Das Hauptresultat, Theorem 5.5, wird beweisen, dass bis auf eine Teilfolge die optimalen semidiskreten Parameter (Zustand, Kontrolle, Adjungierte) in einem gewissen Sinn konvergieren und ihre Grenzwerte das kontinuierliche Optimalitätssystem erfüllen und dass - wiederum bis auf eine Teilfolge - die semidiskreten optimalen Kontrollen sogar stark konvergieren. Dabei liegt die Hauptschwierigkeit darin, dass die Approximation im Gegensatz zur kontinuierlichen LLG keine sphärenwertige Lösung besitzt, weswegen zum Konvergenznachweis eine hinreichend glatte Kontrolle benötigt wird.

Bereits in [Pro01] wird die Zustandsgleichung analytisch und numerisch eingehend untersucht, jedoch ohne eine äußere Kontrolle. Das Hinzufügen der Kontrolle wirkt sich auf die Regularitätseigenschaften der Lösung aus und so ist es vor allem bei den numerischen Resultaten nicht klar, wie sich die Beweise aus [Pro01] anpassen lassen, da die Iterierten weder spährenwertig sind noch eine Energiegleichung erfüllen. Dagegen lassen sich im Kontinuierlichen alle charakteristischen Eigenschaften der LLG analog beweisen:
So existiert - für $\boldsymbol{u}$ glatt genug und Ω eindimensional - eine starke Lösung $\boldsymbol{m} \in H^1(\boldsymbol{L}^2) \cap L^2(\boldsymbol{H}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ der LLG und durch Multiplikation von (0.1) mit $-\Delta \boldsymbol{m}$ und Integration in Raum und Zeit ergibt sich für $t \in [0, T]$ die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^t \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \, \mathrm{d}s = \int_0^t (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} .$$

Bemerkenswert sind des Weiteren die geometrischen Aspekte der LLG: Aus der punktweisen Multiplikation der LLG (0.1) mit $\boldsymbol{m}$ folgt, dass zum einen der Zustand $\boldsymbol{m}$ und seine Änderung $\boldsymbol{m}_t$ punktweise senkrecht aufeinander stehen und zum anderen, dass die starke Lösung der LLG punktweise längenerhaltend ist. Das bedeutet, dass mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in Ω die Lösung $\boldsymbol{m}$ der LLG für alle Zeit-Orts Punkte $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ auf der 2-dimensionalen Sphäre liegt, siehe Abbildung 0.2.

Bei der Wahl der Semidiskretisierung in der Zeit ist es wünschenswert diese Eigenschaften zu erhalten oder mindestens teilweise. In [Pro01, Baň05] werden verschiedene Semidiskretisierungen vorgestellt, doch stellt sich die Frage, welche davon im Rahmen der Optimierung geeignet sind:
Auf den ersten Blick scheint die Semidiskretisierung mit Hilfe der Mittelpunktsregel,

$$d_t \boldsymbol{m}^{j+1} = -\alpha \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \left(\boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \Delta \boldsymbol{m}^{j+1} \right) + \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \Delta \boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \boldsymbol{u}^{j+1},$$

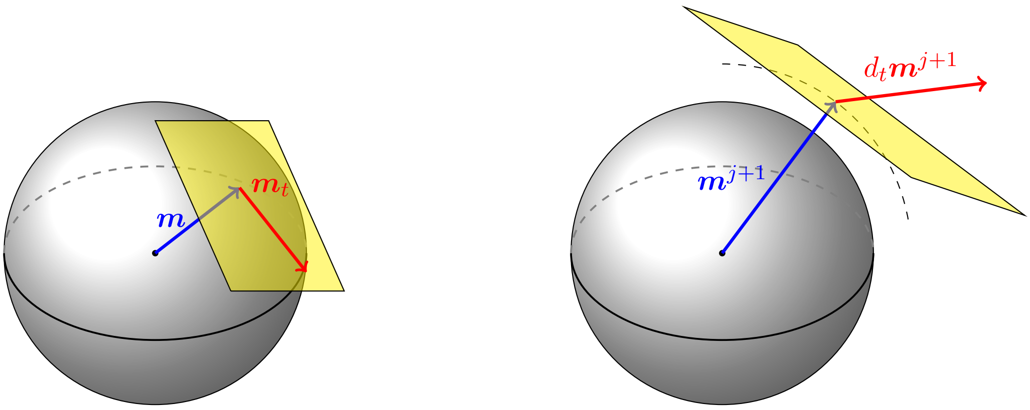

Abbildung 0.2: Im linken Bild ist die kontinuierliche Situation mit $\boldsymbol{m} \in \mathbb{S}^2$ und $\boldsymbol{m}_t \in T\mathbb{S}^2$ dargestellt. Das rechte Bild zeigt die semidiskrete, nicht längenerhaltende Situation, beispielsweise aus dem Verfahren 0.4, mit $\boldsymbol{m}^{j+1} \notin \mathbb{S}^2$ und $\boldsymbol{m}^{j+1} \not\perp d_t\boldsymbol{m}^{j+1}$.

wobei $\boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^j\right)$, der beste Ansatz zu sein, da die Multiplikation mit $\boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}}$ zu $d_t|\boldsymbol{m}^{j+1}|^2 = 0$ führt und damit den Längenerhalt ergibt und aus der Multiplikation mit $-\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}$ die Energiegleichung folgt. Problematisch ist jedoch die Herleitung der für die Optimierung benötigten $\boldsymbol{H}^2(\Omega)$-Schranken (vgl. Proposition 4.3), da die Gleichung unter Verwendung der Grassmann-Identität $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \boldsymbol{c}$ äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} d_t\boldsymbol{m}^{j+1} &- \alpha|\boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}}|^2\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} \\ &= -\alpha\langle \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}}, \Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\rangle \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}} \times \boldsymbol{u}^{j+1} \end{aligned}$$

und somit, weil $|\boldsymbol{m}^{j+\frac{1}{2}}|^2 = 0$ nicht ausgeschlossen werden kann, degeneriert elliptisch ist. Daher ist nicht klar, wie sich die Regularitätseigenschaften von Problem (0.1) auf die Diskretisierung übertragen.

Eine weitere Klasse der längenerhaltenden Semidiskretisierungen sind die Projektionsverfahren, bei denen jedoch in Verbindung mit der Optimierung nicht klar ist, wie die Projektionsabbildung in die Adjungiertengleichung bzw. die Optimalitätsbedingung einfließt.

Demnach greifen wir auf Zeitdiskretisierungen zurück, die nicht längenerhaltend sind. Ein naiver Ansatz ist hierbei, ausgehend von der äquivalenten Formulierung der LLG (0.2), das voll-implizite Eulerverfahren,

$$d_t\boldsymbol{m}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} = \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}|^2\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1} \times \Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}. \tag{0.3}$$

Angenommen die Iterierten $\{\boldsymbol{m}^{j+1}\}_{j=0}^{J-1}$ von (0.3) sind sphärenwertig (für $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in Ω), so gilt $d_t|\boldsymbol{m}^{j+1}|^2 = 0$ überall in Ω. Gleichzeitig liefern das punktweise Multiplizieren von (0.3) mit $\boldsymbol{m}^{j+1}$, die Identität $0 = \Delta|\boldsymbol{m}^{j+1}|^2 = 2\langle \Delta\boldsymbol{m}^{j+1}, \boldsymbol{m}^{j+1}\rangle + 2|\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}|^2$ und die Verwendung der Rechenregeln für das Kreuzprodukt, dass

$$d_t|\boldsymbol{m}^{j+1}|^2 + k|d_t\boldsymbol{m}^{j+1}|^2 = 0$$

und damit wäre die Lösung $\{\boldsymbol{m}^{j+1}\}_{j=0}^{J-1}$ konstant. Da die Iterierten nicht längenerhaltend sind, ist eine Umformulierung wie bei (0.3) mit der Grassmann-Identität nicht möglich und somit erhält man keine Energiegleichung. Zudem ist es mit diesem Schema nicht gelungen eine Energieabschätzung zu beweisen, im Gegensatz zu dieser Diskretisierung:

$$d_t\boldsymbol{m}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} = \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1}\times\boldsymbol{u}^{j+1}. \tag{0.4}$$

Im Vergleich zu (0.3) wird der zur Sphärenbedingung in (0.2) gehörende Lagrange-Multiplikator $|\nabla\boldsymbol{m}|^2$ hier nun explizit diskretisiert um ein einfacheres Verfahren, das in dieser Arbeit verwendet wird, zu erhalten. Wie numerische Resultate zeigen, ist auch dieses Verfahren nicht längenerhaltend (siehe Abbildung 0.2), jedoch ist es gelungen mit Hilfe eines Störargumentes und eines Ansatzes wie in [Rul96] zusammen mit einem Induktionsargument Schranken und eine Energieabschätzung für diese Semidiskretisierung zu zeigen, sowie einen approximativen Längenerhalt (vgl. Kapitel 3). Dafür werden allerdings höhere Regularitätseigenschaften des Zustands $\boldsymbol{m}$ der LLG benötigt (Details siehe weiter unten). Dabei sind die Iterationen in diesem Schema genau so verteilt, dass beim Nachweis der Schranken wegen der Eigenschaften des Kreuzproduktes die höchste Zahl an abzuschätzenden Termen verschwinden, vgl. Beweis von Theorem 3.2. Bei einer anderen Wahl der Iterationen müssen im Stabilitätsbeweis, Theorem 3.2, diese Terme entsprechend untersucht werden; so würde sich der Beweis für dieses Verfahren leicht modifizieren lassen,

$$d_t\boldsymbol{m}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} = \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j}\times\boldsymbol{u}^{j+1}, \tag{0.5}$$

wählt man dagegen dieses Schema, so sind die zusätzlichen Terme (vgl. Terme A_{13} oder A_{223} im Beweis von Theorem 3.2) nicht offensichtlich abschätzbar:

$$d_t\boldsymbol{m}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} = \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j}\times\boldsymbol{u}^{j+1}.$$

Nach diesen Vorüberlegungen soll nun das Augenmerk auf das Thema dieser Arbeit, „Optimale Kontrolle der LLG “, gerichtet werden. Eine intuitive Möglichkeit das optimale Kontrollproblem für einen vorgegebenen Wunschzustand $\widetilde{\boldsymbol{m}}$ und Anfangszustand $\boldsymbol{m}_0$ des Ferromagneten zu formulieren wäre sicherlich:

Problem 0.1
Finde $\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^* : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^3$, sodass

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) &= \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\boldsymbol{m}-\widetilde{\boldsymbol{m}}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \text{u.d.N.}\quad \boldsymbol{m}_t &= -\alpha\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{m}\times(\Delta\boldsymbol{m}+\boldsymbol{u}) \text{ mit } \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}_0.\end{aligned}$$

Dieser Ansatz führt formal zu der folgenden geometrischen Optimalitätsbedingung:

$$\lambda\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{z}\times\boldsymbol{m}^*,$$

wobei $\boldsymbol{u}^*$ die optimale Kontrolle, $\boldsymbol{m}^*$ der optimale Zustand und $\boldsymbol{z}$ die zugehörige Adjungierte ist, die ihrerseits eine Adjungiertengleichung erfüllt. Diese Gleichung bedeutet, dass die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$ senkrecht zum optimalen Zustand $\boldsymbol{m}^*$, bzw. zur Adjungierten $\boldsymbol{z}$ steht, d.h. für alle $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ gilt: $\boldsymbol{u}^*(t,x) \in T_x\mathbb{S}^2$ und $\boldsymbol{z}(t,x) \perp \boldsymbol{u}^*(t,x)$, vgl. Abbildung 0.3.

Analog würde man für ein entsprechendes semidiskretes Optimierungsproblem folgende Optimalitätsbedingung erhalten:

$$\begin{aligned} &\lambda \boldsymbol{u}_*^j = \boldsymbol{z}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^j && \text{aus Nebenbedingung (0.4)} \\ \text{bzw.} \quad &\lambda \boldsymbol{u}_*^j = \boldsymbol{z}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^{j-1} && \text{aus Nebenbedingung (0.5),} \end{aligned} \tag{0.6}$$

wobei $\boldsymbol{u}_*^j$ die optimale semidiskrete Kontrolle, $\boldsymbol{m}_*^j$ bzw. $\boldsymbol{m}_*^{j-1}$ der optimale semidiskrete Zustand und $\boldsymbol{z}^{j-1}$ die zugehörige Adjungierte ist. Wie im Kontinuierlichen erhält man aus diesen Gleichungen, dass die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}_*^j$ senkrecht zum optimalen Zustand bzw. zur Adjungierten steht. Interessanterweise ist die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}_*^j$ jedoch je nach Nebenbedingung einmal zu derselben Iterierten $\boldsymbol{m}_*^j$ und einmal zu der vorangegangen Iterierten $\boldsymbol{m}_*^{j-1}$ orthogonal, vgl. Abbildung 0.3.

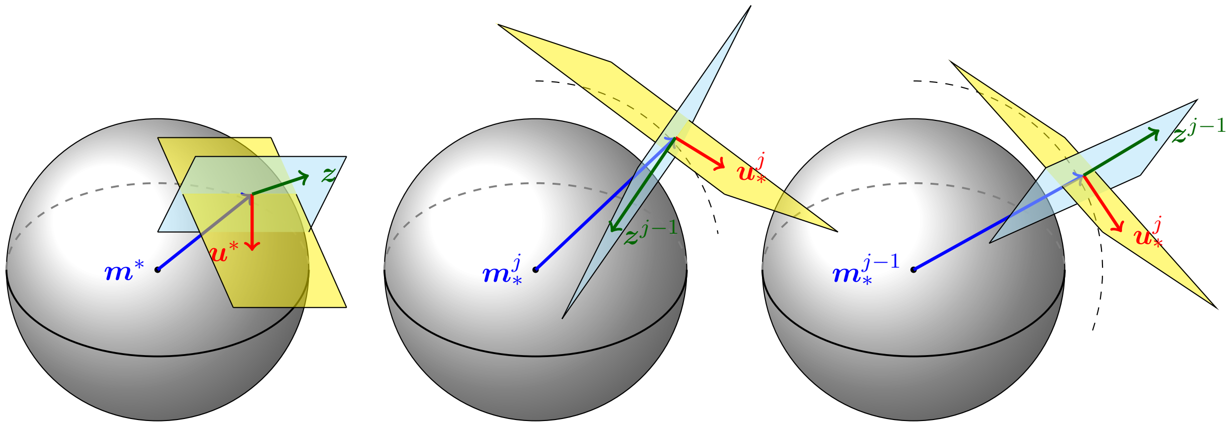

Abbildung 0.3: Das linke Bild zeigt die kontinuierliche Situation mit $\boldsymbol{u}^* \in T\mathbb{S}^2$ und $\boldsymbol{u}^* \perp \boldsymbol{z}$. Das mittlere Bild stellt die semidiskrete Situation zur Nebenbedingung (0.4) dar mit $\boldsymbol{u}_*^j \perp \boldsymbol{m}_*^j$ und $\boldsymbol{u}_*^j \perp \boldsymbol{z}^{j-1}$ und das rechte Bild zur Nebenbedingung (0.5) mit $\boldsymbol{u}_*^j \perp \boldsymbol{m}_*^{j-1}$ und $\boldsymbol{u}_*^j \perp \boldsymbol{z}^{j-1}$.

Auf dem Weg das notwendige kontinuierliche bzw. semidiskrete Optimalitätssystem für Lösungen des Optimierungsproblems und die Konvergenz der semidiskreten optimalen Kontrollen, Zustände und der Adjungierten sowie, dass dieser Grenzwert das kontinuierliche Optimalitätssystem erfüllt, rigoros herzuleiten, treten folgende Probleme auf, die zur Folge gewisse Einschränkungen und Veränderungen der obigen Formulierung haben werden:

Die starken Nichtlinearitäten der LLG verursachen bereits im kontinuierlichen Teil Schwierigkeiten die Existenz einer starken Lösung und somit die Lösbarkeit des Optimierungsproblems sicherzustellen. Eine entscheidende Hilfe hierfür liefert die äquivalente Darstellung der LLG (0.2), sowie die Eindimensionalität des Problems (vgl. Lemma 1.7). Eine Verallgemeinerung dieser Analyse auf höhere Dimensionen ist mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden nicht klar.

Zudem ist beim Nachweis der Existenz der kontinuierlichen Lagrange-Multiplikatoren für Problem 0.1 der Längenerhalt des Zustands $\boldsymbol{m}$ problematisch, da sich dieser im Präzisionsterm $\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}$ destabilisierend auf den linearisierten Differentialoperator auswirken könnte. Jedoch kann in Lemma 2.7 mittels einer Galerkin-Approximation die Existenz und Regularität von Lagrange-Multiplikatoren nachgewiesen werden.

Beim analogen Programm auf dem semidiskreten Level treten ähnliche Schwierigkeiten auf. Ein wesentlicher Punkt der nachfolgenden Analyse ist dabei der Beweis der Stabilität der semidiskretisierten LLG (0.4), wie bereits oben diskutiert. Dafür wird allerdings eine höhere Regularität des Zustandes $\boldsymbol{m}$ benötigt - nicht allein eines Optimums $\boldsymbol{m}^*$ - und um diese sicherzustellen, wird eine bessere Regularität für die Kontrolle über das Funktional erzwungen: somit lautet anstelle von dem in Problem 0.1 vorgestellten Funktional das dem Optimierungsproblem in dieser Arbeit zu Grunde liegende Funktional

$$F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\boldsymbol{m} - \widetilde{\boldsymbol{m}}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 + |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Die Änderung des Funktionals wirkt sich bei der Optimierung nur in der Optimalitätsbedingung (2.13b) bzw. (4.3b) aus, die dadurch eine stationäre Differentialgleichung zweiter Ordnung wird, was wiederum in Verbindung mit besseren Regularitäten der Adjungierten zu höheren Regularitäten der optimalen Kontrolle, vgl. Propositionen 2.9 und 4.11, und in Theorem 5.5 zur starken Konvergenz einer Teilfolge der optimalen semidiskreten Kontrollen in $L^2(\boldsymbol{H}^1)$ führen wird.

Zur Herleitung des Optimalitätssystems für das semidiskrete Optimierungsproblem wird in dieser Arbeit der Ansatz „first discretize, then optimize“ verwendet, es wird also zuerst ein semidiskretes Optimierungsproblem formuliert und für dieses dann das Optimalitätssystem aufgestellt. Der Vorteil in diesem Ansatz liegt darin, dass die Lösbarkeit des Optimalitätssystems bereits aus dem Lagrange-Multiplikatoren-Satz folgt und man zusätzlich auf diese Art und Weise eine natürliche Semidiskretisierung der Adjungierten bekommt. Zudem sind auf Grund der starken Nichtlinearitäten die Regularitäten für den Zustand und die Adjungierte ähnlich, vgl. Korollar 1.9 und Lemma 2.3, und daher wären die Vorteile des Ansatzes „first optimize, then discretize“ nicht nutzbar.

Schließlich wird in Kapitel 5 gezeigt werden, dass der Grenzwert einer Teilfolge der semidiskreten Parameter das kontinuierliche Optimalitätssystem (2.13) erfüllt. Dazu ist eine ausreichende Regularität der semidiskreten Adjungierten bzw. der semidiskreten Zustände notwendig (vgl. Lemmata 3.4, 4.10), die durch die Wahl $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^3(\Omega)$ sichergestellt wird.

Um bei der Bearbeitung der genannten Punkte weitere technische Schwierigkeiten in Form von Randintegralen zu vermeiden, wird als Gebiet $\Omega := \mathbb{S}^1$, der 1-dimensionale Torus (Kreislinie), betrachtet. Um Notationsschwierigkeiten zu umgehen wird nicht zwischen Funktionen auf $\mathbb{S}^1$ und 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ unterschieden, da diese durch die kanonische Kartenwahl ineinander überführt werden können.

In den Arbeiten [AB09] und [ACLP11] beschäftigen sich die Autoren ebenfalls - und nach meinem Kenntnisstand als Erste - mit Optimierung der LLG. Dort wird die Existenz eines Optimums, sowie die rigorose Herleitung von notwendigen Optimalitätsbedingungen gezeigt, jedoch nur für Zustände, die konstant im Ort sind, wofür Methoden aus der optimalen Steuerung gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet werden. Die vorliegende Arbeit ist die erste, die Optimierung der LLG für nicht-konstante Situationen rigoros analytisch und numerisch untersucht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine volldiskretisierte LLG unter Einbeziehung einer externen Kontrolle sowie ein zugehöriges volldiskretes Optimierungsproblem nicht mehr untersucht. Hier könnte versucht werden über ein Störungsargument und die Fehlergleichung für eine Finite-Elemente-Diskretisierung analog zu [Pro01, Theorem 4.4] zusammen mit inversen Abschätzungen Schranken für die Zustandsgleichung zu erhalten. Problematisch könnte jedoch sein eine ausreichende Stabilität der Adjungierten und damit verbunden des Zustandes zu bekommen, um den Grenzwertübergang der Optimalitätsbedingungen beweisen zu können. Entsprechend der kontinuierlichen und semidiskreten Optimalitätsbedingung ist auch in der Volldiskretisierung zu erwarten, dass die optimale diskrete Kontrolle senkrecht auf dem optimalen diskreten Zustand und der diskreten Adjungierten steht, vgl. (0.6).
Die Kontrolle wurde in dieser Arbeit nur im Präzisionsterm betrachtet, jedoch sollte die Hinzunahme der Kontrolle im Dämpfungsterm durch den Term $\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u})$ keine große Hürde darstellen, da im Kontinuierlichen die Längenerhaltung und die Regeln des Kreuzproduktes alle Abschätzungen analog erlauben und im Semidiskreten mit beispielsweise $\boldsymbol{m}^{j+1} \times (\boldsymbol{m}^j \times \boldsymbol{u}^{j+1})$ der Beweis der Abschätzungen, Theorem 3.2, leicht erweitert werden kann. Für die Optimalitätsbedingung würde man für einen optimalen Zustand $\boldsymbol{m}^*$, eine optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$ und die zugehörige Adjungierte $\boldsymbol{z}$ folgendes erhalten:

$$\lambda \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{m}^* + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{m}^*) \times \boldsymbol{m}^*$$

und wieder ergibt sich, dass die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$ senkrecht auf dem optimalen Zustand $\boldsymbol{m}^*$ steht.

Die Arbeit ist dabei wie folgt aufgebaut:
In Kapitel 1 wird die LLG mit einer externen Kontrolle $\boldsymbol{u}$ formuliert, die Existenz einer starken Lösung bewiesen, siehe Proposition 1.5, und anschließend werden höhere Regularitäten der Lösung mittels $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$ gezeigt, siehe Korollar 1.9. In Kapitel 2 wird das oben angedeutete kontinuierliche Optimierungsproblem, Problem 2.1, rigoros formuliert, die Existenz eines Minimums bewiesen, siehe Proposition 1.5, und das Optimalitätssystem (2.13) mit Hilfe des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes aufgestellt.
Die Kapitel 3 und 4 gehen analog zu den Kapiteln 1 und 2 vor. In Kapitel 3 wird die semiimplizit diskretisierte LLG vorgestellt und die Existenz einer Lösung, siehe Proposition 3.1, bzw. die Stabilität des Verfahrens sowie Schranken in höheren Normen bewiesen, siehe Theorem 3.2 und Lemma 3.4. In Kapitel 4 wird das semidiskrete Optimierungsproblem, Problem 4.1, eingeführt und die Existenz eines Minimums bewiesen, siehe Proposition 4.3, bzw. das Optimalitätssystem (4.3) mit Hilfe des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes aufgestellt.
Abschließend wird in Kapitel 5 das Hauptresultat, Theorem 5.5, gezeigt: Bis auf die Wahl einer Teilfolge konvergieren die optimalen Zustände, Adjungierten und Kontrollen des semidiskreten Optimierungsproblems und die Grenzwerte erfüllen das kontinuierliche Optimalitätssystem.

Technische Hilfsmittel und Definitionen

Generell werden vektorwertige Objekte fettgedruckt notiert, z.B. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zudem bezeichne $C > 0$ eine generische Konstante, wobei Abhängigkeiten gelegentlich in Klammern mitgeführt werden.

Die Variable T bezeichne die ganze Arbeit über einen festen Endzeitpunkt $0 < T < \infty$.

Zudem sei für $v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ das Integral über $\mathbb{S}^1$ definiert als

$$\int_{\mathbb{S}^1} v \, \mathrm{d}x := \int_0^{2\pi} v \, \mathrm{d}x$$

und die Ableitungen werden als Ableitungen der zugehörigen 2π-periodischen Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgefasst, wobei

$$\nabla v := \frac{d}{dx} v \quad \text{und} \quad \Delta v := \frac{d^2}{dx^2} v.$$

Mit diesen Definitionen lässt sich mit Funktionen auf $\mathbb{S}^1$ wie gewohnt rechnen und alle auf $\mathbb{R}$ bekannten Resultate gelten ebenfalls für diese Funktionen.

Banach-, Lebesgue-, Sobolev-, Bochnerräume

Für Banachräume $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ wird folgende Notation verwendet:

- X^* für den Dualraum von X,
- $\langle ., . \rangle$ oder Multiplikation für die duale Paarung,
- $X \hookrightarrow Y$ für eine stetige Einbettung,
- $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ für eine kompakte Einbettung,
- $\to$ für starke Konvergenz,
- $\rightharpoonup$ für schwache Konvergenz,
- $\rightharpoonup^*$ für schwach-stern Konvergenz,
- $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ für die Produktnorm.

Des Weiteren bezeichne

- $\mathcal{C}(\Omega)$ den Raum der stetigen Funktionen auf Ω mit der Supremumsnorm,
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$ den Raum der k mal stetig differenzierbaren Funktionen (Norm als Summe der Normen der einzelnen Ableitungen),

- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(\Omega)$ den Raum der glatten Funktionen,
- $L^p(\Omega)$ Lebesgueräume,
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ den m-ten Sobolevraum,
- $L^p(0,T;H^k(\Omega))$ Bochnerräume,
- $L^p(\boldsymbol{H}^k) := L^p(0,T;\boldsymbol{H}^k(\mathbb{S}^1))$,
- $\mathcal{C}(\boldsymbol{H}^k) := \mathcal{C}([0,T],\boldsymbol{H}^k(\mathbb{S}^1))$.

Für Werte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ bezeichne

- $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$,
- $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ die Norm auf $\mathbb{R}^3$.

Für Funktionen $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ bezeichne

- $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) := \int_{\mathbb{S}^1} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle \, \mathrm{d}x$ das Skalarprodukt auf $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$,
- $\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{v}_t$ die zeitliche Ableitung.

Detailliertere Theorie findet sich für Banachräume in [Alt06], Lebesgueräume und Maßtheorie in [Els11], Sobolev- und Bochnerräume in [Ada78, Sho97].

Bekannte und in dieser Arbeit mehrfach verwendete Resultate für diese Räume sind:

Lemma 0.2 (Einbettung)
Es gilt

$$\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}(\mathbb{S}^1) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Beweis:
Siehe [Ada78, Theorem 4.12]. □

Lemma 0.3 (schwach-stern Teilfolgenkonvergenz)
Sei $\boldsymbol{X}$ ein separabler Banachraum und sei weiter $\{\boldsymbol{v}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\boldsymbol{X}^*$. Dann existieren ein $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}^*$ und eine Teilfolge $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{\boldsymbol{v}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, sodass

$$\boldsymbol{v}_l \rightharpoonup^* \boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{X}^*.$$

Beweis:
Siehe [Alt06, Satz 6.5]. □

Lemma 0.4 (schwache Teilfolgenkonvergenz)
Sei $\boldsymbol{X}$ ein reflexiver Banachraum und sei weiter $\{\boldsymbol{v}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\boldsymbol{X}$. Dann existieren ein $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$ und eine Teilfolge $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{\boldsymbol{v}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, sodass

$$\boldsymbol{v}_l \rightharpoonup \boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{X}.$$

Beweis:
Siehe [Alt06, Satz 6.10]. □

Lemma 0.5 (Gagliardo-Nirenberg)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $n \geq 1$. Sei weiter $2 > n$ mit $2 \leq q \leq \infty$ oder $2 = n$ mit $2 \leq q < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, m, q)$, sodass für $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$ gilt:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)} \leq C \|\boldsymbol{v}\|^{\theta}_{\boldsymbol{H}^m(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|^{1-\theta}_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)},$$

wobei $\theta := \frac{n}{2m} - \frac{n}{qm}$.

Beweis:
Siehe [Ada78, Theorem 5.8]. □

Korollar 0.6
Es existiert eine Konstante C, sodass für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ gilt:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} \leq C \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{1}{4}}_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{3}{4}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \leq C \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{v}\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Lemma 0.7 (Aubin-Lions)
Seien $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ Banachräume mit $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}$ seien zudem reflexiv. Sei weiter $\boldsymbol{X} \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{Z}$.
Dann gilt für $1 < p < \infty$ und $1 < q < \infty$

$$\boldsymbol{W} := \left\{ \boldsymbol{u} \in L^p(\boldsymbol{X}) \,\middle|\, \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{u} \in L^q(\boldsymbol{Z}) \right\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\boldsymbol{Y}).$$

Beweis:
Siehe [Sho97, Kapitel III, Proposition 1.3]. □

Lemma 0.8 (Stetige Einbettung)
Sei $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ ein Gelfand-Tripel und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Dann gilt

$$\boldsymbol{W} := \left\{ \boldsymbol{u} \in L^p(\boldsymbol{X}) \,\middle|\, \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{u} \in L^q(\boldsymbol{Z}) \right\} \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{Y}).$$

Beweis:
Siehe [Sho97, Kapitel III, Proposition 1.2]. □

Lemma 0.9 (Langrange-Multiplikatoren-Satz)
Seien $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Z}$ Banachräume und die Abbildungen $f : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ bzw. $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ stetig Fréchet-differenzierbar.
Falls f unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ eine Extremstelle an dem regulären Punkt $\boldsymbol{x}^*$ besitzt, so existiert ein $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^*$, sodass die Lagrange-Funktion

$$L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$$

stationär an $\boldsymbol{x}^*$ ist, d.h.

$$L'(\boldsymbol{x}^*) = f'(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}.$$

Beweis:
Siehe [Lue69, Kapitel 9, Theorem 1]. □

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ wird mit $\times$ notiert,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln, die sich durch Nachrechnen mit der Definition des Kreuzproduktes bzw. seiner geometrischen Bedeutung nachweisen lassen:

Lemma 0.10
Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

1. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$
2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,
4. $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{0}$,
5. $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle$,
6. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{c}$ (Graßmann-Identität).

Lemma 0.11
Seien $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$. Dann gilt:

1. $\nabla(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \nabla \boldsymbol{v})$,
2. $(\langle \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = -(\langle \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) - (\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \nabla \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) - (\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w}, \nabla \boldsymbol{z})$.

Bemerkung:
Lemma 0.11 gilt entsprechend für Ableitungen in der Zeit.

Iterierte

Für $j = 0, \ldots, J$ verwende die äquidistante Zeitschrittweite $k := \frac{T}{J}$, also $t_j := jk$. Verwende folgende Notation für die semidiskreten Iterierten:

- Iterierte: $\boldsymbol{v}^j$ für $j = 0, \ldots, J$,
- diskrete Zeitableitung: $d_t \boldsymbol{v}^{j+1} := \frac{\boldsymbol{v}^{j+1} - \boldsymbol{v}^j}{k}$ für $j = 0, \ldots, J-1$.

Fortsetzungen

Für Iterierte $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=0}^J$ wird folgende Notation für fortgesetzte Funktionen verwendet:

- Stückweise affine Zeitinterpolation,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t) := \frac{t-t_j}{k}\boldsymbol{v}^{j+1} + \frac{t_{j+1}-t}{k}\boldsymbol{v}^j \qquad \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}],$$

- Stückweise konstante Funktionen,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) &:= \boldsymbol{v}^{j+1} && \text{für } t \in (t_j, t_{j+1}], \\ \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t) &:= \boldsymbol{v}^{j} && \text{für } t \in (t_j, t_{j+1}], \\ \boldsymbol{\mathcal{V}}^\bullet(t) &:= \boldsymbol{v}^{j+2} && \text{für } t \in (t_j, t_{j+1}], \end{aligned}$$

  mit $\boldsymbol{v}^{-1} = \boldsymbol{v}^0$ und $\boldsymbol{v}^{J+1} := \boldsymbol{0}$.

Für $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{L}^2)$ werden Fortsetzungen wie folgt notiert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^+(t) &:= \boldsymbol{v}(t_{j+1}) && \text{für } t \in (t_j, t_{j+1}] \\ \boldsymbol{v}^-(t) &:= \boldsymbol{v}(t_j) && \text{für } t \in (t_j, t_{j+1}]. \end{aligned}$$

Für die Fortsetzungen erhält man durch einfaches Nachrechnen folgende Lemmata:

Lemma 0.12
Es ist für $j = 0, \dots, J$ an den Zeitpunkten

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_j) = \boldsymbol{v}^j, \;\; \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_j) = \boldsymbol{v}^j, \;\; \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t_j) = \boldsymbol{v}^{j-1}, \;\; \boldsymbol{\mathcal{V}}^\bullet(t_j) = \boldsymbol{v}^{j+1}$$

und für $t \in [0, T]$ gilt

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}}(t) = \frac{\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)}{k}.$$

Lemma 0.13
Sei $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+$ unabhängig von k in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt und $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$.
Dann sind $\boldsymbol{\mathcal{V}}^-, \boldsymbol{\mathcal{V}}^\bullet$ unabhängig von k in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt.

Lemma 0.14
Seien $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+$ und $\boldsymbol{\mathcal{V}}^-$ unabhängig von k in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt.
Dann ist $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ unabhängig von k in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt.

Lemma 0.15
Seien $\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}^+, \boldsymbol{\mathcal{V}}^-, \boldsymbol{\mathcal{V}}^\bullet, d_t\boldsymbol{\mathcal{V}}$ unabhängig von k in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt.
Dann gilt für $k \to 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{V}}^- &\to \boldsymbol{0} \quad \text{in } L^2(\boldsymbol{L}^2) \\ \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{V}} &\to \boldsymbol{0} \quad \text{in } L^2(\boldsymbol{L}^2). \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich, dass $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+$ unabhängig von k in $L^\infty(\boldsymbol{L}^2)$ beschränkt ist, so ist für $k \to 0$:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{V}}^\bullet \to \boldsymbol{0} \quad \text{in } L^2(\boldsymbol{L}^2).$$

Lemma 0.16
Sei $\boldsymbol{v} \in H^1(\boldsymbol{L}^2) \cap \mathcal{C}(\boldsymbol{L}^2)$.
Dann gilt

$$\left\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^+\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}, \left\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^-\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \leq kC \left(\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\boldsymbol{L}^2)}\right).$$

Beweis:
Es ist

$$\left\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^+\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0,T]} \|\boldsymbol{v}(s) - \boldsymbol{v}(t_{i+1})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

wobei $t_{i+1} - s \leq k$ und Cauchy-Schwarz liefert für alle $s \in (t_i, t_{i+1}]$:

$$\|\boldsymbol{v}(s) - \boldsymbol{v}(t_{i+1})\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = \left\|\int_{t_{i+1}}^{s} \boldsymbol{v}_t(s) \mathrm{d}s\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = k^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{v}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

1 Eigenschaften LLG für feste Kontrolle $\boldsymbol{u}$

In diesem Kapitel sollen die Veränderungen der LLG untersucht werden, die sich durch das Hinzufügen einer Kontrolle $\boldsymbol{u}$, wie in der Einleitung bereits angedeutet, ergeben. Die LLG wird dabei in der folgenden Form betrachtet:

Die Magnetisierung $\boldsymbol{m} : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ erfülle für eine feste Kontrolle $\boldsymbol{u} : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ die LLG

$$\boldsymbol{m}_t = -\alpha \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}) \qquad \text{auf } [0,T] \times \mathbb{S}^1, \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{m}(0,.) = \boldsymbol{m}_0 \qquad \text{auf } \mathbb{S}^1. \tag{1.1b}$$

Im ersten Abschnitt wird eine äquivalente Formulierung der LLG vorgestellt, die auf Grund ihrer Struktur geeigneter für Regularitätsanalysen sein wird, und anschließend die Existenz einer starken Lösung für eine feste Kontrolle $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ und $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ mit Hilfe einer glatten Galerkin-Approximation im Ort bewiesen, vgl. Proposition 1.5.

Im zweiten Abschnitt werden formale Regularitätsanalysen für die LLG mit $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ und $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ betrachtet, vgl. [Pro01, Kapitel 4.1]. Allerdings liefern diese Analysen - wie in Schritt 2 des Beweises von Proposition 1.5 einmal ausführlich durchgeführt - die Regularität für den Zustand $\boldsymbol{m}$ rigoros. Zudem wird in einer dieser Analysen, Lemma 1.7, deutlich, warum in dieser Arbeit ein eindimensionales Gebiet gewählt worden ist.

Schließlich werden im dritten Abschnitt formale Regularitätsanalysen für die LLG mit höherer Regularität der Kontrolle, $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$, und $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ durchgeführt. Dies ergibt eine bessere Regularität des Zustandes (vgl. Korollar 1.9), was in den folgenden Kapiteln Abschätzungen erleichtern und den Grundstein zur Herleitung der Stabilität der Semidiskretisierung legen wird. Ohne diese stärkere Regularität ist es nicht klar, wie man die Stabilität der semidiskreten LLG erhält.

1.1 Existenz einer starken Lösung für $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$

Bevor die Existenz einer starken Lösung der LLG bewiesen wird, soll zunächst der Lösungsbegriff definiert werden.

Definition 1.1 (Starke Lösung der LLG)
Es wird $\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ eine **starke Lösung der LLG** genannt, wenn

1. Gleichung (1.1) fast überall (in Raum und Zeit) gilt,
2. für alle $t \in [0,T]$ folgende Energiegleichung gilt:

$$\frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \int_0^t \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s = \int_0^t (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}s + \frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

3. $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ überall (in Raum und Zeit).

Bemerkung: (Längenerhalt der LLG)
Sei $\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ eine Lösung von (1.1) mit $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ und $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$. Dann ist $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ überall in Raum und Zeit.
Multipliziere dazu (1.1a) mit $\boldsymbol{m}$ und erhalte

$$\frac{1}{2} d_t |\boldsymbol{m}|^2 = -\alpha \langle \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}), \boldsymbol{m} \rangle + \langle \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{m} \rangle = 0.$$

Damit ist der Betrag konstant in der Zeit und für $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{m} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ gilt $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ in $[0,T] \times \mathbb{S}^1$ bzw. $\|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} = 1$.

Lemma 1.2 (Energiegleichung)
Sei $\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ eine Lösung von (1.1) mit $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$. Dann gilt für alle $t \in [0,T]$ die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \int_0^t \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s = \int_0^t (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}s + \frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} .$$

Beweis:
Multipliziere (1.1a) mit $-\Delta \boldsymbol{m}$, integriere im Ort und erhalte mit den Rechenregeln des Kreuzproduktes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= -\alpha (\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}), -\Delta \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u}, \Delta \boldsymbol{m}) \\ &= -\alpha \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Integration in der Zeit und $\boldsymbol{m} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1)$ ergibt die Behauptung. □

Ein Hilfsmittel beim Umgang mit der LLG (1.1) wird folgende Umformulierung sein: Die Magnetisierung $\boldsymbol{m} : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ erfülle

$$\boldsymbol{m}_t - \alpha \Delta \boldsymbol{m} = \alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}) \quad \text{auf } [0,T] \times \mathbb{S}^1, \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{m}(0,.) = \boldsymbol{m}_0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^1. \tag{1.2b}$$

Analog zu Definition 1.1 verwende den Begriff einer **starken Lösung**, wobei für $t \in [0,T]$ folgende Energiegleichung gilt:

$$\int_0^t \|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s = \int_0^t (\boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{m}_t) \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} .$$

Bemerkung: (Längenerhalt)
Sei $\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ eine Lösung von (1.2) mit $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ und $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$. Dann ist $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ überall in Raum und Zeit.
Multipliziere (1.1a) mit $\boldsymbol{m}$, verwende $0 = \Delta |\boldsymbol{m}|^2 = 2\langle \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m} \rangle + 2|\nabla \boldsymbol{m}|^2$, forme um und erhalte für $v := |\boldsymbol{m}|^2 - 1$ die Gleichung

$$v_t - \alpha \Delta v = 2\alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 v.$$

Multipliziere mit v, schätze ab und mit $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \|v\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \|\nabla v\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C \|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|v\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C \|\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \|v\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} .$$

Zusammen mit dem Lemma von Gronwall und $v(0) = 0$ folgt die Normiertheit.

Lemma 1.3 (Energiegleichung)
Sei $\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ eine Lösung von (1.2) mit $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ und $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$. Dann gilt für alle $t \in [0, T]$ die Energiegleichung

$$\int_0^t \|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = \int_0^t (\boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{m}_t) \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} .$$

Beweis:
Multipliziere (1.2a) mit $\boldsymbol{m}_t$, integriere im Ort, erhalte mit den Rechenregeln des Kreuzproduktes und da $\langle \boldsymbol{m}_t, \boldsymbol{m} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\boldsymbol{m}|^2 = 0$ (Längenerhalt der Lösung) folgendes:

$$\|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s = (\boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{m}_t)$$

Integration in der Zeit und $\boldsymbol{m} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1)$ ergibt die Behauptung. □

Lemma 1.4 (Äquivalente Formulierung)
Eine Lösung $\boldsymbol{m}$ mit $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ und $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$ ist genau dann eine starke Lösung der Gleichung (1.1), wenn sie eine starke Lösung der Gleichung (1.2) ist.

Beweis:
Beide Gleichungen haben eine starke Lösung und diese ist normiert, d.h. $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ überall in $[0, T] \times \mathbb{S}^1$. Die Äquivalenz ergibt sich aus der Grassmann-Identität,

$$\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, \Delta \boldsymbol{m} \rangle \boldsymbol{m} - |\boldsymbol{m}|^2 \Delta \boldsymbol{m},$$

kombiniert mit folgender Gleichheit:

$$0 = \Delta |\boldsymbol{m}|^2 = 2 \langle \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m} \rangle + 2 |\nabla \boldsymbol{m}|^2.$$

Die Energiegleichungen folgen aus den Lemmata 1.2 und 1.3. □

Beweise nun die Existenz einer starken Lösung der LLG.

Proposition 1.5
Für $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ überall in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ existiert eine starke Lösung $\boldsymbol{m}$ von (1.1) mit Regularität

$$\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$$

und $|\boldsymbol{m}|^2 = 1$ in $[0, T] \times \mathbb{S}^1$.

Beweis:
Schritt 1: Existenz einer lokalen Lösung nach einem glatten Galerkin-Ansatz im Ort:
Sei $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1)$ (konstruiere diese beispielsweise aus periodischen Eigenfunktionen von $-\Delta$, [Eva10, Abschnitt 6.5]) und $\boldsymbol{V}_N$ der Aufspann über $\mathbb{R}$ der Basiselemente $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}_{j=1}^N$. Definiere weiter

$$\boldsymbol{m}_N(t) := \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)\boldsymbol{\varphi}_j.$$

Dann lautet das im Ort diskretisierte zu (1.1) analoge Problem:
Gesucht sind für $j = 1, \dots, N$ stetig differenzierbare Funktionen $\alpha_j \in \mathcal{C}^1(0, \widetilde{T})$, sodass

$$\boldsymbol{m}_{N_t} = -\alpha \boldsymbol{m}_N \times (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N) + \boldsymbol{m}_N \times (\Delta \boldsymbol{m}_N + \boldsymbol{u}) \tag{1.3}$$

mit $\boldsymbol{m}_N(0) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(0)\boldsymbol{\varphi}_j$ und $\alpha_j(0) := (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}_j)$.

Damit bleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung (1.3) von der Form

$$\dot{\boldsymbol{m}}_N = f(\boldsymbol{m}_N), \quad f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,$$

wobei $\boldsymbol{m}_N$ mit folgendem Element identifiziert wird:

$$\boldsymbol{m}_N(t) \cong \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Da f der Struktur nach stetig differenzierbar ist, existiert nach Picard-Lindelöf auf dem Intervall $(0, \widetilde{T}) \subseteq (0, T)$ eine lokal eindeutige Lösung $\boldsymbol{m}_N \in \mathcal{C}^1([0, \widetilde{T}], \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1))$, die insbesondere glatt im Ort ist.

Schritt 2: Definition eines Kandidaten $\hat{\boldsymbol{m}}$:
Unter Verwendung der Definition von $\boldsymbol{m}_N(0)$, Ausnutzung der Orthonormalität der $\boldsymbol{\varphi}_j$ und [Alt06, 7.7.3] erhält man:

$$\|\boldsymbol{m}_N(0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = \sum_{j=1,l=1}^N (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}_j)(\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}_l)(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_l) \le \sum_{j=1}^\infty |(\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}_j)|^2 = \|\boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Zudem folgt aus den Eigenfunktionen des Laplace, dass

$$-\Delta \boldsymbol{m}_N(0) = -\sum_{j=1}^N \alpha_j(0)\Delta\boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{j=1}^N \widetilde{\alpha}_j(0)\boldsymbol{\varphi}_j \in \boldsymbol{V}_N$$

und somit liefern partielle Integration und Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\nabla \boldsymbol{m}_N(0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= -(\Delta \boldsymbol{m}_N(0), \boldsymbol{m}_N(0)) = -(\Delta \boldsymbol{m}_N(0), \boldsymbol{m}_0) \\ &= (\nabla \boldsymbol{m}_N(0), \nabla \boldsymbol{m}_0) \le \frac{1}{2}\|\nabla \boldsymbol{m}_N(0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2}\|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}. \end{aligned}$$

Damit ist $\|\boldsymbol{m}_N(0)\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}$ von N unabhängig beschränkt.

Daher werden in Abschnitt 1.2 Schranken der Lösung $\boldsymbol{m}_N$ hergeleitet, die unabhängig von N sind. Mit diesen Schranken und den Eigenschaften der Räume existiert nach den Lemmata 0.3 und 0.4 ein $\hat{\boldsymbol{m}} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2)$, sodass für eine Teilfolge und $N \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_N &\rightharpoonup \hat{\boldsymbol{m}} && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^2),\\
\boldsymbol{m}_{N_t} &\rightharpoonup \hat{\boldsymbol{m}}_t && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{L}^2),\\
\boldsymbol{m}_N &\rightharpoonup^* \hat{\boldsymbol{m}} && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^1)
\end{aligned}$$

und mit Aubin-Lions, Lemma 0.7, gilt weiter

$$\boldsymbol{m}_N \to \hat{\boldsymbol{m}} \qquad \text{stark in } L^2(\boldsymbol{H}^1).$$

Schritt 3: $\hat{\boldsymbol{m}}$ besitzt Lösungseigenschaft:
Zeige unter Verwendung der Abschätzungen aus Abschnitt 1.2 und der Konvergenzen aus Schritt 2, dass die folgenden drei Konvergenzen für $N \to \infty$ und $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ gelten:

1. $\int_0^T (\boldsymbol{m}_{N_t}, \boldsymbol{\varphi}) \to \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}}_t, \boldsymbol{\varphi})$, ist wegen der schwachen Konvergenz klar.
2. $\int_0^T (\boldsymbol{m}_N \times (\Delta \boldsymbol{m}_N + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varphi}) \to \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}} \times (\Delta \hat{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varphi})$,

   da $\hat{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ und somit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\boldsymbol{m}_N \times (\Delta \boldsymbol{m}_N + \boldsymbol{u}) - \hat{\boldsymbol{m}} \times (\Delta \hat{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varphi})\\
&= \int_0^T ((\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}) \times \Delta \boldsymbol{m}_N, \boldsymbol{\varphi}) + \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}} \times (\Delta \boldsymbol{m}_N - \Delta \hat{\boldsymbol{m}}), \boldsymbol{\varphi})\\
&\quad + \int_0^T ((\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})\\
&\leq \|\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\Delta \boldsymbol{m}_N\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} - \int_0^T (\Delta \boldsymbol{m}_N - \Delta \hat{\boldsymbol{m}}), \hat{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{\varphi})\\
&\quad + \int_0^T (\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\varphi})\\
&\to 0 \qquad (\text{für } N \to \infty).
\end{aligned}$$

3. $\int_0^T (\boldsymbol{m}_N \times (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N), \boldsymbol{\varphi}) \to \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}} \times (\hat{\boldsymbol{m}} \times \Delta \hat{\boldsymbol{m}}), \boldsymbol{\varphi})$,

   da $\hat{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{\varphi} \in L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)$ und mit 2.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\boldsymbol{m}_N \times (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N), \boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}} \times (\hat{\boldsymbol{m}} \times \Delta \hat{\boldsymbol{m}}), \boldsymbol{\varphi})\\
&= \int_0^T ((\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}) \times (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N), \boldsymbol{\varphi}) + \int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}} \times (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}} \times \Delta \hat{\boldsymbol{m}}), \boldsymbol{\varphi})\\
&\leq \|\boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\quad - \int_0^T (\boldsymbol{m}_N \times \Delta \boldsymbol{m}_N - \hat{\boldsymbol{m}} \times \Delta \hat{\boldsymbol{m}}, \hat{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{\varphi})\\
&\to 0 \qquad (\text{für } N \to \infty).
\end{aligned}$$

Zudem gilt mit partieller Integration für $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{0}$ und $N \to \infty$:

$$\begin{aligned}\int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}}_t, \boldsymbol{\varphi}) \leftarrow \int_0^T (\boldsymbol{m}_{Nt}, \boldsymbol{\varphi}) &= -\int_0^T (\boldsymbol{m}_N, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{m}_N(0), \boldsymbol{\varphi}(0)) \\ &\to -\int_0^T (\hat{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}(0)),\end{aligned}$$

da $\boldsymbol{m}_N(0) \to \boldsymbol{m}_0$ in $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ (folgt aus [Alt06, 7.7]) und somit ist $\hat{\boldsymbol{m}}(0) = \boldsymbol{m}_0$.

Damit liefert das Fundamentallemma der Variationsrechnung, [Alt06, 2.21], die Lösungseigenschaft von $\hat{\boldsymbol{m}} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2)$ für Gleichung (1.1).

Lemmata 0.8 und 0.2 liefern $\hat{\boldsymbol{m}} \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ und mit der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnittes folgt $|\hat{\boldsymbol{m}}|^2 = 1$ in $[0,T] \times \mathbb{S}^1$. Analog zu Schritt 2 des Beweises von Lemma 1.6 ergibt sich die Energiegleichung und somit ist $\hat{\boldsymbol{m}}$ eine starke Lösung. □

Bemerkung: (Eindeutigkeit)
Tatsächlich ist die Lösung $\boldsymbol{m}$ der Differentialgleichung (1.1) sogar eindeutig. Der Beweis verläuft analog zu [Pro01, Lemma 4.4], da der zusätzliche Term $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{u}$ beim Aufstellen der Fehlergleichung und anschließender Multiplikation des Fehler wegen der Rechenregeln des Kreuzproduktes gerade Null ergibt.

1.2 Regularität für $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$

Betrachte einige formale Regularitätsanalysen von (1.1) für eine Kontrolle $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Lemma 1.6
Sei $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.
Dann gilt für die Lösung $\boldsymbol{m}$ der Gleichung (1.1) folgende Abschätzung:

$$\|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \|\boldsymbol{m}_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \le C\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}, \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right).$$

Beweis:
Schritt 1: Aus der Energiegleichung, Lemma 1.2, folgt für $t \in [0,T]$:

$$\frac{1}{2}\|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\, \mathrm{d}s \le C\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \frac{1}{2}\|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Schritt 2: Multipliziere (1.2a) mit $\boldsymbol{m}_t$:
Integriere im Ort und erhalte mit $\langle \boldsymbol{m}_t, \boldsymbol{m}\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{m}|^2 = 0$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}_t) + (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_t) \\ &\le C(\sigma)\left(\|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right) + \sigma\|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere über die Zeit und erhalte für $t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \|\boldsymbol{m}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C\left(\|\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}\right) + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Mit Schritt 1 folgt die Behauptung. □

Im nächsten Lemma wird ersichtlich, warum in dieser Arbeit ein eindimensionales Gebiet gewählt worden ist.

Lemma 1.7
Sei $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.
Dann gilt für die Lösung $\boldsymbol{m}$ der Gleichung (1.1) folgende Abschätzung:

$$\|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}, \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Multipliziere (1.2a) mit $-\Delta \boldsymbol{m}$, integriere im Ort und erhalte mit den Rechenregeln des Kreuzproduktes bzw. Gagliardo-Nirenberg, Korollar 0.6,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= -\alpha(|\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m}, \Delta \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u}, \Delta \boldsymbol{m}) \\ &\leq C(\sigma)\left(\|\nabla \boldsymbol{m}\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right) + \sigma \|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\leq C(\sigma)\left(\|\boldsymbol{m}\|^6_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{m}\|^4_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right) + \sigma \|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere über die Zeit und erhalte mit Lemma 1.6 für $t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{m}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4} \int_0^t \|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \leq C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}, \|\nabla \boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

□

Bemerkung: (2-dimensionales Gebiet)
Der obige Beweis bereitet für ein 2-dimensionales Szenario Probleme, da die Gagliardo-Nirenberg-Abschätzung, Lemma 0.5, dort für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie folgt lautet:

$$\|\nabla \boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} \leq C \|\nabla \boldsymbol{m}\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{m}\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

und damit $\|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}$ nicht absorbiert werden kann, da die Hochzahl bereits zwei ist.

Eine weitere Möglichkeit wäre, mit kleinen Anfangsdaten $\boldsymbol{m}_0$ und kleinen Kräften $\boldsymbol{u}$ zu arbeiten, vgl. [GH93]. Im Zuge einer Optimierung würden damit nur kleine externe Kräfte $\boldsymbol{u}$ zugelassen werden und damit wäre eine Optimierung unnötig.

1.3 Bessere Regularität für $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$

In diesem Abschnitt sollen formale Regularitätsanalysen von (1.1) mit besserer Regularität der Kontrolle, $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$, durchgeführt werden.

Lemma 1.8
Sei $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$.
Dann gilt für die Lösung $\boldsymbol{m}$ der Gleichung (1.1) folgende Abschätzung:

$$\|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\boldsymbol{m}\|^2_{L^2(\boldsymbol{H}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{m}_t\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Leite (1.2a) formal im Ort ab und setze $\boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{m}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_t - \alpha\Delta\boldsymbol{A} =& 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{A}, \nabla\boldsymbol{m}\rangle\boldsymbol{m} + \alpha|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{A} \\ &+ \boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m}\times\nabla\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Schritt 1: Multipliziere (1.4) mit $-\Delta\boldsymbol{A}$:
Integriere im Ort und erhalte mit den Rechenregeln für das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\qquad= 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{A}, \nabla\boldsymbol{m}\rangle\boldsymbol{m}, -\Delta\boldsymbol{A}\right) + \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{A}, -\Delta\boldsymbol{A}\right) + \left(\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{m}, -\Delta\boldsymbol{A}\right) \\ &\qquad\quad+ \left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{u}, -\Delta\boldsymbol{A}\right) + \left(\boldsymbol{m}\times\nabla\boldsymbol{u}, -\Delta\boldsymbol{A}\right) \\ &\qquad=: 2\alpha I_1 + \alpha I_2 + I_3 + I_4 + I_5.\end{aligned}$$

Schätze die Terme einzeln ab, verwende die Einbettung $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$ und Gagliardo-Nirenberg, Korollar 0.6:

$$\begin{aligned}I_1 &\leq \|\nabla\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\Delta\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\leq C(\sigma)\|\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_2 &\leq \|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\Delta\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\leq C(\sigma)\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\quad+ \sigma\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_3 &\leq \|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\Delta\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\Delta\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\leq C(\sigma)\|\Delta\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\|\Delta\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_4 &\leq \|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\Delta\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\leq C(\sigma)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_5 &\leq C(\sigma)\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\|\Delta\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und mit

$$\beta := C\|\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} + C\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

$$\begin{aligned}\gamma := C\,\|\nabla \boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\,\|\nabla \boldsymbol{m}\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\,\|\Delta \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ + C\,\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\|\boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\,\|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\end{aligned}$$

ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla \boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha\,\|\Delta \boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le \beta\,\|\nabla \boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \gamma.$$

Das Lemma von Gronwall liefert mit den Lemmata 1.6 und 1.7 und den Voraussetzungen

$$\|\nabla \boldsymbol{A}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\Delta \boldsymbol{A}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \le C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Schritt 2: Multipliziere (1.4) mit $\boldsymbol{A}_t$:
Integriere im Ort und erhalte

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla \boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}&\\ &= 2\alpha(\langle \nabla \boldsymbol{A}, \nabla \boldsymbol{m}\rangle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{A}_t) + \alpha(|\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_t) + (\boldsymbol{A} \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{A}_t)\\ &\quad + (\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_t) + (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}_t) + (\boldsymbol{m} \times \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}_t)\\ &=: 2\alpha I_1 + \alpha I_2 + I_3 + \ldots + I_6.\end{aligned}$$

Schätze bis auf I_4 alle Terme analog zu Schritt 1 ab, verarbeite I_4 wie folgt:

$$I_4 \le C(\sigma)\,\|\Delta \boldsymbol{A}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\,\|\boldsymbol{A}_t\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

für $\sigma > 0$. Wähle σ genügend klein, integriere in der Zeit und erhalte mit den Lemmata 1.6, 1.7 und Schritt 1 die Behauptung. □

Zusammengefasst ergibt sich folgende Regularität für die Lösung der LLG:

Korollar 1.9
Sei $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$.
Dann besitzt die Lösung $\boldsymbol{m}$ der Gleichung (1.1) die Regularität

$$\boldsymbol{m} \in L^2(\boldsymbol{H}^3) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^2).$$

Beweis:
Die Regularität folgt nach einer glatten Galerkin-Approximation, vgl. Beweis von Proposition 1.5, direkt aus den Lemmata 1.6 bis 1.8 und die Einbettung aus Lemma 0.8. □

Bemerkung: (Notwendigkeit der höheren Regularität)
Insbesondere die $L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$-Regularität des Zustandes $\boldsymbol{m}$, die garantiert ist sobald die Kontrolle $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$ gewählt wird, wird in den nächsten Abschnitten die Abschätzungen erleichtern und helfen Stabilität für die semidiskrete LLG herzuleiten, vgl. Theorem 3.2.

2 Optimierung, Analysis

In diesem Kapitel wird für einen vorgegebenen Wunschzustand $\widetilde{\boldsymbol{m}}$ und Anfangszustand $\boldsymbol{m}_0$ des Ferromagneten das folgende kontinuierliche Optimierungsproblem untersucht:

Definiere dazu die Räume

$$\boldsymbol{M} := L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{U} := L^2(\boldsymbol{H}^1)$$

sowie das Funktional

$$F : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}, \quad F(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) := \frac{1}{2} \|\boldsymbol{m} - \widetilde{\boldsymbol{m}}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\boldsymbol{H}^1)} .$$

Damit lautet das kontinuierliche Optimierungsproblem:

Problem 2.1
Seien $\widetilde{\boldsymbol{m}} : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\lambda > 0$ gegeben.
Finde $\boldsymbol{m}^* : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{u}^* : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \boldsymbol{U}$, sodass

$$(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) = \underset{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}}{\operatorname{argmin}} F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \quad \text{u.d.N. (1.1).}$$

Der erste Abschnitt in diesem Kapitel wird die Existenz eines Minimums von Problem 2.1 mit Hilfe einer Minimalfolgenkonstruktion beweisen und deutlich machen, dass die Existenz einer starken Lösung der LLG notwendig ist, um zu zeigen, dass das konstruierte Minimum die Nebenbedingung erfüllt; siehe den Beweis von Proposition 2.3.

Im zweiten Abschnitt werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen eines Minimums (2.13) über den Lagrange-Multiplikatoren-Satz rigoros hergeleitet. Beim Nachweis der Existenz der Lagrange-Multiplikatoren könnte sich - wie in der Einleitung bereits beschrieben - der Längenerhalt der Lösung $\boldsymbol{m}$ im Präzisionsterm $\boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}$ destabilisierend auf den linearisierten Differentialoperator auswirken. Daher wird die Voraussetzung des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes, dass Minima an regulären Werten angenommen werden, in Lemma 2.7 mit einer Galerkin-Approximation bewiesen.

Anschließend werden im dritten Abschnitt höhere Regularitäten der Adjungierten aus der Adjungiertengleichung (2.13c) unter Berücksichtigung der Regularitäten des Zustandes formal hergeleitet, vgl. Lemma 2.8.

Im letzten Abschnitt werden bessere Regularitäten der optimalen Kontrolle aus der Optimalitätsbedingung (2.13b) und den Regularitäten der Adjungierten bzw. des Zustandes geschlossen, vgl. Proposition 2.9.

2.1 Existenz eines Minimums

Bevor die Existenz einer Lösung von Problem 2.1 bewiesen wird, sollen zwei Eigenschaften des Funktionals F aufgelistet werden.

Lemma 2.2
Für das Funktional $F : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ gilt:

1. F ist schwach unterhalbstetig auf $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U}$,
2. F ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\langle F'(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}), (\boldsymbol{\delta m}, \boldsymbol{\delta u})\rangle = \int_0^T (\boldsymbol{m} - \widetilde{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{\delta m})\ \mathrm{d}s + \lambda \int_0^T (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) + (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{\delta u})\ \mathrm{d}s.$$

Beweis:
Für 1. siehe [Trö09, Satz 2.12] und für 2. siehe [Trö09, Abschnitt 2.6]. □

Zeige nun die Existenz einer Lösung von Problem 2.1.

Proposition 2.3
Es existiert mindestens eine Lösung $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U}$ des Problems 2.1.

Beweis:
Schritt 1: Konstruktion einer Minimalfolge:
Da $F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \geq 0$ und nach Proposition 1.5 die Lösungsmenge der Nebenbedingung nicht leer ist, existiert ein Infimum F^* mit

$$0 \leq F^* = \inf_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U}} F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \quad \text{u.d.N. (1.1).}$$

Daher ist es möglich, eine minimierende Folge $(\boldsymbol{m}_l, \boldsymbol{u}_l)$ mit $F(\boldsymbol{m}_l, \boldsymbol{u}_l) \to F^*$ zu wählen.

Schritt 2: Konstruktion eines Kanditaten $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$:
Da F offenbar auf $L^2(\boldsymbol{L}^2) \times L^2(\boldsymbol{H}^1)$ koerziv ist, ist

$$\|\boldsymbol{m}_l\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}, \|\boldsymbol{u}_l\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)} \leq C$$

und damit sind die Kontrollen unabhängig von l beschränkt. Gehe weiter analog wie im Beweis von Proposition 1.5 vor und erhalte ein $\boldsymbol{m}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2)$ und ein $\boldsymbol{u}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$ sowie Teilfolgen, sodass für $l \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_l &\rightharpoonup \boldsymbol{u}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{m}_l &\rightharpoonup \boldsymbol{m}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^2),\\
\boldsymbol{m}_{l_t} &\rightharpoonup \boldsymbol{m}^*_t && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{L}^2),\\
\boldsymbol{m}_l &\rightharpoonup^* \boldsymbol{m}^* && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^1)\\
\boldsymbol{m}_l &\to \boldsymbol{m}^* && \text{stark in } L^2(\boldsymbol{H}^1).
\end{aligned}$$

Schritt 3: $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ ist zulässig:
Zeige analog wie im Beweis von Proposition 1.5, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ die Nebenbedingung (1.1)

erfüllt, verarbeite dabei den Term mit der Kontrolle jedoch für $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ und $l \to \infty$ unter Verwendung der Schranken und Konvergenzen wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\boldsymbol{m}_l \times \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}) \\
&\quad = \int_0^T ((\boldsymbol{m}_l - \boldsymbol{m}^*) \times \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{\varphi}) + \int_0^T (\boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{u}_l - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\varphi}) \\
&\quad \leq \|\boldsymbol{m}_l - \boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{u}_l\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} - \int_0^T (\boldsymbol{u}_l - \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}) \\
&\quad \to 0.
\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{m}_l(0) = \boldsymbol{m}_0$ für alle l folgt mit demselben Argument wie im Beweis von Proposition 1.5, dass $\boldsymbol{m}^*(0) = \boldsymbol{m}_0$. Somit erfüllt $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U}$ die Nebenbedingung.

Schritt 4: $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ ist Minimum:
Da F nach Lemma 2.2 schwach unterhalbstetig ist, gilt:

$$F^* = \inf_{\substack{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \\ \text{u.d.N (1.1)}}} F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \leq F(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) \leq \lim_{l \to \infty} F(\boldsymbol{m}_l, \boldsymbol{u}_l) = F^*.$$

Also $F(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) = F^*$ und damit ist die Existenz eines Minimums bewiesen. □

Bemerkung: (Starke Lösung der LLG)
In Schritt 3 des vorangehenden Beweises muss gezeigt werden, dass das konstruierte $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ die Nebenbedingung (1.1) erfüllt. Dabei ist dies nur möglich, wenn die Minimalfolge der Zustände eine uniforme Schranke in $L^2(\boldsymbol{H}^2)$ besitzt, da entweder Schranken in $L^2(\boldsymbol{H}^2)$ und starke Konvergenz einer Teilfolge in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$ oder nach einer partiellen Integration starke Konvergenz einer Teilfolge in $L^2(\boldsymbol{H}^1)$ benötigt werden. Dies bedeutet gerade, dass die Lösungen der LLG stark sein müssen.

Bemerkung: (Eindeutigkeit Minimum)
Über die Eindeutigkeit des Minimums wird in Proposition 2.3 keine Aussage gemacht. Tatsächlich kann dies, da die Nebenbedingung nichtlinear ist, nicht ohne Weiteres sichergestellt werden.

2.2 Optimalitätssystem

An dieser Stelle wird das kontinuierliche Optimierungsproblem 2.1 umformuliert, um den Lagrange-Multiplikatoren-Satz, Lemma 0.9, anwenden zu können.

Definiere und wiederhole dafür folgende Räume:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Z}_1 := L^2(\boldsymbol{L}^2), \quad \boldsymbol{Z}_2 := \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1), \\
&\boldsymbol{M} = L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty), \quad \boldsymbol{U} = L^2(\boldsymbol{H}^1)
\end{aligned}$$

sowie folgende zwei Abbildungen:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_1,\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) := \boldsymbol{m}_t - \alpha \Delta \boldsymbol{m} - \alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \times (\Delta \boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}),\\
&\boldsymbol{a} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) := \boldsymbol{m}(0) - \boldsymbol{m}_0.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich folgendes zu Problem 2.1 äquivalente Problem:

Problem 2.4
Seien $\widetilde{\boldsymbol{m}} : [0, T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\lambda > 0$ gegeben.
Minimiere F u.d.N.

$$
\boldsymbol{H} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_1 \times \boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.
$$

2.2.1 Voraussetzungen des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes

Prüfe die Voraussetzungen des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes:

- $F : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar, siehe Lemma 2.2,
- $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_1 \times \boldsymbol{Z}_2$ ist stetig Fréchet-differenzierbar, siehe Lemmata 2.5, 2.6,
- Lösungen von Problem 2.4 sind reguläre Punkte von $\boldsymbol{H}$, siehe Lemma 2.7.

Die nachfolgenden zwei Lemmata beweisen die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit der Nebenbedingung $\boldsymbol{H}$ komponentenweise.

Lemma 2.5
Die Abbildung $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_1$ ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}), (\boldsymbol{\delta m}, \boldsymbol{\delta u}) \rangle = \boldsymbol{\delta m}_t - \alpha \Delta \boldsymbol{\delta m} - \alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{\delta m} - 2\alpha \langle \nabla \boldsymbol{m}, \nabla \boldsymbol{\delta m} \rangle \boldsymbol{m}\\
- \boldsymbol{\delta m} \times \Delta \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{\delta m} - \boldsymbol{\delta m} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\delta u}.
\end{aligned}
$$

Beweis:
Schritt 1: $\boldsymbol{e}$ ist Gâteaux-differenzierbar:
Berechne die Richtungsableitungen in Richtung $\boldsymbol{\delta m}$ und $\boldsymbol{\delta u}$:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\delta m} \rangle &= \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{m} + \epsilon \boldsymbol{\delta m}, \boldsymbol{u})\\
&= \boldsymbol{\delta m}_t - \alpha \Delta \boldsymbol{\delta m} - \alpha |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{\delta m} - 2\alpha \langle \nabla \boldsymbol{m}, \nabla \boldsymbol{\delta m} \rangle \boldsymbol{m} - \boldsymbol{\delta m} \times \Delta \boldsymbol{m}\\
&\quad - \boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{\delta m} - \boldsymbol{\delta m} \times \boldsymbol{u},
\end{aligned}
$$

und

$$
\langle \boldsymbol{e}_u(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\delta u} \rangle = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\delta u}) = -\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\delta u}.
$$

Erhalte somit als möglichen Kandidaten

$$\langle \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle = \langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta m}\rangle + \langle \boldsymbol{e}_u(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta u}\rangle.$$

Da dieser Kandidat offenbar linear in der Richtung ist und sich für $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})$ fest beschränken lässt, siehe unten, ist er die Gâteaux-Ableitung.

Für den Nachweis der Beschränktheit verwende, dass $\boldsymbol{M} \subseteq L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1)$:

$$\begin{aligned}
&\|\langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta m}\rangle\|_{\boldsymbol{Z}_1} \\
&\le \|\boldsymbol{\delta m}_t\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \alpha\,\|\Delta\boldsymbol{\delta m}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \alpha\,\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}\,\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\boldsymbol{\delta m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\quad + 2\alpha\,\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}\,\|\nabla\boldsymbol{\delta m}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} + \|\boldsymbol{\delta m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\Delta\boldsymbol{m}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \\
&\quad + \|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\Delta\boldsymbol{\delta m}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \|\boldsymbol{\delta m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \\
&\le C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})\,\|\boldsymbol{\delta m}\|_{\boldsymbol{M}}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\|\langle \boldsymbol{e}_u(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta u}\rangle\|_{\boldsymbol{Z}_1} \le \|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\,\|\boldsymbol{\delta u}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \le C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})\,\|\boldsymbol{\delta u}\|_{\boldsymbol{U}}\,.$$

Schritt 2: $\boldsymbol{e}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar:
Nach [Růž04, Satz 2.5] folgt aus stetig Gâteaux-differenzierbar bereits stetig Fréchet-differenzierbar; die Stetigkeit von $\langle \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle$ bzgl. $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})$ ergibt sich aus der Stetigkeit der einzelnen Operationen. □

Lemma 2.6
Die Abbildung $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_2$ ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\langle \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle = \boldsymbol{\delta m}(0).$$

Beweis:
Schritt 1: $\boldsymbol{a}$ ist Gâteaux-differenzierbar:
Berechne die Richtungsableitungen in Richtung $\boldsymbol{\delta m}$ und $\boldsymbol{\delta u}$:

$$\langle \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta m}\rangle = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\delta m}(0)$$

und

$$\langle \boldsymbol{a}_u(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta u}\rangle = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{0}.$$

Habe somit als möglichen Kanditaten

$$\langle \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle = \langle \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta m}\rangle + \langle \boldsymbol{a}_u(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\delta u}\rangle = \boldsymbol{\delta m}(0).$$

Da dieser Kandidat offenbar linear in der Richtung ist und sich für $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})$ fest beschränken lässt, siehe unten, ist er die Gâteaux-Ableitung.

Die Beschränktheit ergibt sich aus $\boldsymbol{M} \subseteq L^\infty(\boldsymbol{H}^1)$:

$$\|\langle \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle\|_{\boldsymbol{Z}_2} = \|\boldsymbol{\delta m}(0)\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \le \|\boldsymbol{\delta m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)} \le \|\boldsymbol{\delta m}\|_{\boldsymbol{M}}\,.$$

Schritt 2: $\boldsymbol{a}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar:
Nach [Růž04, Satz 2.5] folgt aus stetig Gâteaux-differenzierbar bereits stetig Fréchet-differenzierbar und die Stetigkeit von $\langle \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\delta m},\boldsymbol{\delta u})\rangle$ bzgl. $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})$ ergibt sich klarerweise. □

Zeige schließlich, dass Minima an regulären Punkten angenommen werden.

Lemma 2.7
Sei $(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*)$ eine Lösung von Problem 2.4.
Dann ist $(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*)$ ein regulärer Punkt der Nebenbedingung $\boldsymbol{H}$.

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mapsto \langle \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\rangle : \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_2 \quad \Big(= L^2(\boldsymbol{L}^2)\times \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)\Big)$$

surjektiv ist. Insbesondere erfüllen dabei $(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*)$ die LLG und sind damit nach Korollar 1.9 in den folgenden besseren Räumen:

$$\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)\cap H^1(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^2) \text{ und } \boldsymbol{u}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^1).$$

Sei nun $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2) \in L^2(\boldsymbol{L}^2)\times\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ gegeben. Gesucht ist ein $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{U}$ mit

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\rangle &= \begin{pmatrix}\langle \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\rangle\\ \langle \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\rangle\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{e}_u(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),\boldsymbol{w}\rangle\\ \boldsymbol{v}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ \boldsymbol{f}_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Setze $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ und zeige, dass ein $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{M}$ existiert mit

$$\langle \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{0})\rangle = \begin{pmatrix}\langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),\boldsymbol{v}\rangle\\ \boldsymbol{v}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ \boldsymbol{f}_2\end{pmatrix}.$$

Es bleibt zu zeigen: Es existiert ein $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{M}$, welches folgende lineare Differentialgleichung, die bereits in Lemma 2.5 hergeleitet wurde, erfüllt:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*),\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{v}_t - \alpha\Delta\boldsymbol{v} - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{v} - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^*,\nabla\boldsymbol{v}\rangle\boldsymbol{m}^*\\ - \boldsymbol{v}\times\Delta\boldsymbol{m}^* - \boldsymbol{m}^*\times\Delta\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}_1\end{aligned} \tag{2.1}$$

mit $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{f}_2$ und damit wäre $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{m}^*,\boldsymbol{u}^*) : \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_2$ surjektiv.

Schritt 1: Semidiskretisierung mit semi-implizitem Euler:
Punktauswertungen bei $\boldsymbol{m}^*$ sind möglich, da $\boldsymbol{m}^*\in\mathcal{C}(\boldsymbol{H}^2)$; verwende für $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{f}_1$ die $L^2(\mathbb{S}^1)$-Projektion auf den in der Zeit endlich-dimensionalen Unterraum

$$\boldsymbol{P}_k := \Big\{\boldsymbol{p}_k\in L^2(\boldsymbol{L}^2)\,\Big|\,\boldsymbol{p}_k|_{(t_i,t_{i+1}]}\in\mathcal{P}_0((t_i,t_{i+1}],\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1))\Big\} \quad \text{mit } k>0.$$

Sei $\boldsymbol{z}\in L^2(\boldsymbol{L}^2)$. Dann ist die Projektion $P_k\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{P}_k$ definiert durch:

$$\int_0^T (P_k\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z},\boldsymbol{p}_k) = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{p}_k\in\boldsymbol{P}_k. \tag{2.2}$$

Die Existenz der Projektion folgt aus Lax-Milgram, [Alt06, Satz 4.2], und mit der Wahl von $P_k\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{P}_k$ bzw. $P_k\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p}_k \in \boldsymbol{P}_k$ in (2.2) sowie Cauchy-Schwarz erhält man folgende Eigenschaften: Zum einen die Beschränktheit der Projektion, da

$$\|P_k\boldsymbol{z}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} = \int_0^T \|P_k\boldsymbol{z}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = \int_0^T (\boldsymbol{z}, P_k\boldsymbol{z}) \leq \|\boldsymbol{z}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|P_k\boldsymbol{z}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}$$

und somit

$$\|P_k\boldsymbol{z}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq \|\boldsymbol{z}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}\,, \tag{2.3}$$

zum anderen die starke Konvergenz in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$, da

$$0 = \int_0^T (P_k\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}, P_k\boldsymbol{z} \pm \boldsymbol{z} - \boldsymbol{p}_k) = \|P_k\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \int_0^T (P_k\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{p}_k)\,,$$

also

$$\|P_k\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p}_k\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}\,,$$

und wegen der beliebigen Wahl von $\boldsymbol{p}_k \in \boldsymbol{P}_k$ und der Dichtheit von $\bigcup\limits_{k>0} \boldsymbol{P}_k$ in $L^2(\boldsymbol{L}^2)$, vgl. Anhang, erhält man

$$P_k\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{z} \text{ in } L^2(\boldsymbol{L}^2). \tag{2.4}$$

Verwende folgende semi-implizite Formulierung der Ableitung:

$$\begin{aligned} d_t\boldsymbol{v}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{v}^{j+1} - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{v}^{j+1} - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^j, \nabla\boldsymbol{v}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}& \\ - \boldsymbol{v}^{j+1} \times \Delta\boldsymbol{m}^{j+1} - \boldsymbol{m}^{j+1} \times \Delta\boldsymbol{v}^{j+1} - \boldsymbol{v}^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1} &= \boldsymbol{f}_1^{j+1} \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{m}^j := \boldsymbol{m}^*(t_j)$, $\boldsymbol{u}^j := P_k\boldsymbol{u}^*(t_j)$ und $\boldsymbol{f}_1^j := P_k\boldsymbol{f}_1(t_j)$ für $j = 0, \ldots, J$.

Schwach formuliert ergibt sich:
Gesucht ist $\boldsymbol{v}^{j+1} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$, sodass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ gilt:

$$a\left(\boldsymbol{v}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) = l(\boldsymbol{\varphi})\,, \tag{2.5}$$

wobei mit Hilfe der Rechenregeln des Kreuzproduktes

$$\begin{aligned} a\left(\boldsymbol{v}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) &:= \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{v}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \alpha\left(\nabla\boldsymbol{v}^{j+1}, \nabla\boldsymbol{\varphi}\right) - \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{v}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \left(\boldsymbol{v}^{j+1} \times \Delta\boldsymbol{m}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \\ &\quad - \left(\nabla\boldsymbol{m}^{j+1} \times \boldsymbol{\varphi}, \nabla\boldsymbol{v}^{j+1}\right) - \left(\boldsymbol{m}^{j+1} \times \nabla\boldsymbol{\varphi}, \nabla\boldsymbol{v}^{j+1}\right) - \left(\boldsymbol{v}^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right), \\ l(\boldsymbol{\varphi}) &:= \left(\boldsymbol{f}_1^{j+1} + \frac{1}{k}\boldsymbol{v}^j + 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^j, \nabla\boldsymbol{v}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \end{aligned}$$

und mit Startiterierten $\boldsymbol{v}^0 := \boldsymbol{f}_2$.

Schritt 2: Existenz von $\boldsymbol{v}^{j+1} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ mit Lax-Milgram:
Die Existenz ergibt sich iterativ mit Lax-Milgram, prüfe dafür folgende Voraussetzungen:

1. $a(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi})$ ist stetige Bilinearform auf $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \times \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$,

2. $a(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) \geq C \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}$ für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ ($\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$-Koerzivität),
3. $l(\boldsymbol{\varphi})$ ist stetige Linearform auf $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$.

Die Linearität von $l(.)$ bzw. die Bilinearität von $a(.,.)$ ist klar und mit der Einbettung $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$, Lemma 0.2, erhält man aus

$$\begin{aligned}
|l(\boldsymbol{\varphi})| &\leq \left\|\boldsymbol{f}_1^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{k}\left\|\boldsymbol{v}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad + 2\alpha \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{v}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(k) \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\varphi})| &\leq \frac{1}{k}\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad + \alpha \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad + \left\|\nabla \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(k) \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}$$

die Stetigkeit. Die $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$-Koerzivität ergibt sich für k genügend klein aus

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) &= \frac{1}{k}\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \alpha\left(|\nabla \boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right) - \left(\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}\times\boldsymbol{\varphi},\nabla\boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{k} - \alpha\left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} - C\left\|\nabla \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\right)\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\geq C(k)\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}$$

wobei k unabhängig von dem Iterationsschritt ist, da $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$.

Schritt 3: Konstruktion von Fortsetzungen der Iterierten:
Konstruiere aus den Iterierten $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=0}^J$, $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$, $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=0}^J$ und $\left\{\boldsymbol{f}_1^j\right\}_{j=0}^J$ die Zeitinterpolation $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ und die konstanten Fortsetzungen $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}^-$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}^-$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}^+$, $\boldsymbol{\mathcal{U}}^+$ und $\boldsymbol{\mathcal{F}}^+$.

Schritt 4: Herleitung von der Zeitschrittweite unabhängiger Schranken:
Gleichung (2.5) lautet mit den in Schritt 3 definierten Funktionen für $t \in (0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}}(t),\boldsymbol{\varphi}\right) + \alpha\left(\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t),\nabla\boldsymbol{\varphi}\right) \\
&= \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t),\boldsymbol{\varphi}\right) + \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)|^2\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t),\boldsymbol{\varphi}\right) + 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t),\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t),\boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\times\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t),\boldsymbol{\varphi}\right) + \left(\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\times\boldsymbol{\varphi},\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\times\nabla\boldsymbol{\varphi},\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\times\boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t),\boldsymbol{\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Abschätzung 1: Testen von (2.6) mit $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)$ ergibt mit

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}}(t), \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) &= \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t), \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) \\ &= \frac{1}{2k}\left(\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \|\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right)\end{aligned}$$

und den Rechenregeln für das Kreuzprodukt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2k}\left(\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \|\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right) + \alpha\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\quad\le \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t), \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) + \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)|^2\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t), \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) \\ &\qquad + 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t), \nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t), \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) + \left(\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\times\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t), \nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) \\ &\quad =: I_1 + \alpha I_2 + 2\alpha I_3 + I_4.\end{aligned}$$

Schätze die Terme einzeln ab:

$$\begin{aligned}I_1 &\le \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_2 &\le \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_3 &\le C(\sigma)\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\ I_4 &\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere von 0 bis t_l und erhalte mit

$$\begin{aligned}\beta(t) := \frac{1}{2} &+ C\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + C\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\ &+ C\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

und

$$k\sum_{j=1}^{l}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le k\sum_{j=1}^{l}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\left\|\nabla\boldsymbol{v}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \tag{2.7}$$

sowie der stückweisen Konstantheit aller Funktionen folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_l)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha k}{2}\sum_{j=1}^{l}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_j)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\le \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t_j)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{v}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{k}{2}\left\|\nabla\boldsymbol{v}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=1}^{l}\beta(t_j)\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_j)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$ lässt sich der Term $k\beta(t_l)\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_l)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}$ für k klein genug absorbieren. Weiter gilt nach der Ungleichung (2.3) für $\boldsymbol{f}_1 \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$

$$\int_0^T\left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s \le \int_0^T\|\boldsymbol{f}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s \le C$$

und somit ergibt mit $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$ und $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ das diskrete Gronwall-Lemma

$$\max_{0\le j\le J} \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_j)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le C.$$

Da aber $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) = \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_j)$ für ein bestimmtes $0 \le j \le J$, ergibt sich

$$\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}, \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \le C. \tag{2.8}$$

Abschätzung 2: Formales Testen von (2.6) mit $-\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)$ ergibt mit den Rechenregeln des Kreuzproduktes

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2k}\left(\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right) + \alpha\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad\le \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t), -\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) + \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)|^2\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t), -\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right)\\
&\qquad + 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t), \nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t), -\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right) + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\times\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t), -\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right)\\
&\qquad + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\times\boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t), -\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right)\\
&\quad =: I_1 + \alpha I_2 + 2\alpha I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Schätze die Terme einzeln ab und verwende $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$, Lemma 0.2:

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
I_2 &\le \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + \sigma\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
I_3 &\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
I_4 &\le \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\le C(\sigma)\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + \sigma\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
I_5 &\le \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere von 0 bis t_l und erhalte mit

$$\begin{aligned}
\beta(t) &:= C\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} + C\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + C\left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
\gamma(t) &:= C\left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}$$

$$+ C \left\| \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)},$$

wobei bei I_3 eine Indexverschiebung beachtet werden muss, und mit (2.7) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t_l) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \int_0^{t_l} \left\| \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s \\
&\quad \leq \int_0^T \gamma \ \mathrm{d}s + \left(kC \left(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^1 \right) + \frac{1}{2} \right) \left\| \nabla \boldsymbol{v}^0 \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \int_0^{t_l} \beta \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Mit $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{L}^2)$, Ungleichung (2.3) und den Resultaten aus Abschätzung 1 ergibt sich

$$\left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}, \left\| \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C. \tag{2.9}$$

Abschätzung 3: Testen von (2.6) mit $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}}(t)$ und die Regeln des Kreuzproduktes ergeben

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2k} \left(\left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right) \\
&\quad \leq \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^+(t), \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right) + \alpha \left(|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t)|^2 \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t), \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right) \\
&\quad + 2\alpha \left(\langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^-(t), \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^-(t) \rangle \boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t), \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right) + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t), \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right) \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t) \times \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t), \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \right) + \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+(t), \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right) \\
&\quad =: I_1 + \alpha I_2 + 2\alpha I_3 + I_4 + \ldots + I_6.
\end{aligned}$$

Schätze die einzelnen Terme analog zu Abschätzung 2 ab, ersetze dort $\Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}(t)$ durch $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}}(t)$. Der Term I_5 tritt dort nicht auf, kann aber wie folgt verarbeitet werden:

$$I_5 \leq C(\sigma) \left\| \boldsymbol{\mathcal{M}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\| \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

für $\sigma > 0$. Analog zu Abschätzung 1, 2 und mit deren Resultaten folgt:

$$\left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)}, \left\| \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}} \right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C. \tag{2.10}$$

Zusammenfassend ergeben (2.8) bis (2.10):

$$\left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^2)}, \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \right\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)}, \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^- \right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}}^- \right\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)}, \left\| \boldsymbol{\mathcal{V}} \right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)} \leq C$$

und

$$\left\| \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{V}} \right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C,$$

wobei C unabhängig von der Zeitschrittweite k ist.

Schritt 5: Übergang zum schwachen Grenzwert:
Nach Schritt 4 und Lemmata 0.4, 0.3 und 0.15 existiert ein $\boldsymbol{v}$ mit

$$\boldsymbol{v} \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \ \cap \ H^1(\boldsymbol{L}^2) = \boldsymbol{M},$$

sodass für geeignete Teilfolgen von $\boldsymbol{\mathcal{V}}^+$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}^-$ und $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ mit $k \to 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}} &\rightharpoonup \boldsymbol{v} && \text{schwach in } H^1(\boldsymbol{L}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ &\rightharpoonup \boldsymbol{v} && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^- &\rightharpoonup \boldsymbol{v} && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^+, \boldsymbol{\mathcal{V}}^- &\rightharpoonup^* \boldsymbol{v} && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^1).
\end{aligned}$$

Schritt 6: $\boldsymbol{v}$ löst die lineare Differentialgleichung (2.1):
Da $\boldsymbol{m}^* \in H^1(\boldsymbol{H}^1) \cap \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1)$ gilt nach Lemma 0.16, dass $\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^- \to \boldsymbol{m}^*$ in $L^2(\boldsymbol{H}^1)$.

Zeige, dass mit den Abschätzungen und Konvergenzen aus den vorgehenden Schritten für $k \to 0$ für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ gilt:

1. $\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}} - \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}\right) \to 0,$
2. $\int_0^T (\nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \nabla\boldsymbol{v}, \nabla\boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
3. $\int_0^T (|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
4. $\int_0^T (\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \nabla\boldsymbol{\mathcal{V}}^-\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \langle\nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{v}\rangle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
5. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{v} \times \Delta\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
6. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
7. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
8. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{F}}^+ - \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{\varphi}) \to 0.$

1. und 2. sind wegen der schwachen Konvergenz klar. Weiter folgt aus der starken Konvergenz der Projektion, siehe (2.4), dass 8. gilt.

Zu 3.:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\quad = \int_0^T \left(\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\rangle\boldsymbol{\mathcal{V}}^+, \boldsymbol{\varphi}\right) + \int_0^T \left(\langle\nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\rangle\boldsymbol{\mathcal{V}}^+, \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\quad\quad + \int_0^T \left(|\nabla\boldsymbol{m}^*|^2(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\quad \le \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\quad\quad + \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\quad\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}, |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi}\right)
\end{aligned}$$

$$\to 0 \qquad (\text{für } k \to 0),$$

da $|\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Zu 4.: Verwende für den 3. Summanden die Graßmann-Identität

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- \rangle \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad = \int_0^T \Big(\langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- \rangle (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\varphi} \Big) + \int_0^T (\langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- \rangle \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad + \int_0^T (\langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- - \nabla \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \\
&\quad \le \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\qquad + \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla \boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\qquad + \int_0^T (\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- - \nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}^* \times (\nabla \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi})) + \int_0^T (\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^- - \nabla \boldsymbol{v}, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^* \rangle \boldsymbol{\varphi}) \\
&\quad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0),
\end{aligned}$$

da $\boldsymbol{m}^* \times (\nabla \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi})$ und $\langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^* \rangle \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Zu 5.: Verwende beim 1. Summanden partielle Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{v} \times \Delta \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad = \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times (\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\varphi} \Big) + \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}) \times \Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad = -\int_0^T \Big(\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times (\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\varphi} \Big) - \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times (\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*), \nabla \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\qquad + \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}) \times \Delta \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad \le \Big\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{V}}^+\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\qquad + \Big\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\qquad + \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0),
\end{aligned}$$

da $\Delta \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Zu 6.:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad = \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*) \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+, \boldsymbol{\varphi} \Big) + \int_0^T \Big(\boldsymbol{m}^* \times (\Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \Delta \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad \le \Big\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} + \int_0^T \Big(\Delta \boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \Delta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \Big) \\
&\quad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0),
\end{aligned}$$

da $\boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Zu 7.:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&= \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ \times (\boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\varphi}\Big) + \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&\leq \left\|\boldsymbol{\mathcal{V}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{u}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} + \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{V}}^+ - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}^* \times \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&\to 0 \qquad (\text{für } k \to 0),
\end{aligned}$$

da $\boldsymbol{\mathcal{U}}^+$ nach (2.4) stark konvergiert und $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$.

Zudem gilt mit partieller Integration für $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{0}$ und $k \to 0$:

$$\int_0^T (\boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{\varphi}) \leftarrow \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{V}}_t, \boldsymbol{\varphi}) = -\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{\varphi}(0)) \to -\int_0^T (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{\varphi}(0))$$

und somit ist $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{f}_2$.

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, [Alt06, Satz 2.21], existiert somit ein $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{U}$, welches die Gleichung (2.1) erfüllt. $\square$

2.2.2 Aufstellen des Optimalitätssystems

Nach dem Lagrange-Multiplikatoren-Satz, Lemma 0.9, existiert ein $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) \in \boldsymbol{Z}_1^* \times \boldsymbol{Z}_2^*$, sodass die Lagrange-Funktion

$$L(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) := F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{u})$$

stationär am Minimum $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ wird, d.h.

$$\begin{aligned}
L'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) &= F'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) \\
&= F'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Richtungsableitungen

$$\langle L_m(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta m}\rangle = 0, \tag{2.11}$$
$$\langle L_u(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta u}\rangle = 0. \tag{2.12}$$

Ausgerechnet lauten (2.11) und (2.12) unter Verwendung der Lemmata 2.2, 2.5, 2.6

$$\langle L_m(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta m}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle F_m(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta m}\rangle + \langle \boldsymbol{z}_1, \langle \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta m}\rangle\rangle + \langle \boldsymbol{z}_2, \langle \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta m}\rangle\rangle \\
&= \int_0^T (\boldsymbol{m}^* - \widetilde{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{\delta m})\,\mathrm{d}s + \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m}_t)\,\mathrm{d}s - \alpha \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \Delta\boldsymbol{\delta m})\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \alpha \int_0^T \Big(\boldsymbol{z}_1, |\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \boldsymbol{\delta m}\Big)\,\mathrm{d}s - 2\alpha \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{\delta m}\rangle \boldsymbol{m}^*)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\delta m})\,\mathrm{d}s - \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m} \times \Delta \boldsymbol{m}^*)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m} \times \boldsymbol{u}^*)\,\mathrm{d}s + (\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{\delta m}(0)) \\
&= 0 \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\delta m} \in \boldsymbol{M}
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
&\langle L_u(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta u}\rangle \\
&\qquad = \langle F_u(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\delta u}\rangle + \langle \boldsymbol{z}_1, \langle e_u(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\delta u}\rangle\rangle + \langle \boldsymbol{z}_2, \langle \boldsymbol{a}_u(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\delta u}\rangle\rangle \\
&\qquad = \lambda \int_0^T (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\delta u}) + (\nabla \boldsymbol{u}^*, \nabla \boldsymbol{\delta u})\,\mathrm{d}s - \int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\delta u})\,\mathrm{d}s \\
&\qquad = 0 \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\delta u} \in \boldsymbol{U}.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für eine Lösung $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ von Problem 2.1 folgendes notwendiges Optimalitätssystem:

$$
\mathbf{0} = \boldsymbol{m}_t^* + \alpha \boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{m}^*) - \boldsymbol{m}^* \times (\Delta \boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{u}^*), \tag{2.13a}
$$

$$
\mathbf{0} = \lambda \boldsymbol{u}^* - \lambda \Delta \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{m}^*, \tag{2.13b}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &-(\boldsymbol{z}_{1_t}, \boldsymbol{\delta m}) - \alpha(\boldsymbol{z}_1, \Delta \boldsymbol{\delta m}) - (\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\delta m}) - \alpha(\boldsymbol{z}_1, |\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \boldsymbol{\delta m}) \\
&- 2\alpha(\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{\delta m}\rangle \boldsymbol{m}^*) - (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{\delta m}) - (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m} \times \Delta \boldsymbol{m}^*) \\
&- (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m} \times \boldsymbol{u}^*) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\delta m} \in \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{2.13c}
$$

mit den Anfangs- bzw. Endwerten $\boldsymbol{m}^*(0) = \boldsymbol{m}_0$ und $\boldsymbol{z}_1(T) = \mathbf{0}$.

Dabei entspricht die Zustandgleichung (2.13a) mit Anfangswert natürlich der LLG, (1.1), und die Optimalitätsbedingung (2.13b) ergibt sich aus einer starken Formulierung von (2.12). Die Adjungiertengleichung (2.13c) mit Endwert erhält man analog zu [Gun03, Abschnitt 2.6] nach einer partiellen Integration des Termes $\int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m}_t)\,\mathrm{d}s$ in der Zeit und geeigneten Wahlen der $\boldsymbol{\delta m} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty) \subseteq \boldsymbol{M}$ aus (2.11).

Bemerkung: (Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{z}_2$)
Aus (2.11) erhält man zudem durch die partielle Integration des Termes $\int_0^T (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\delta m}_t)\,\mathrm{d}s$ in der Zeit und geeigneten Wahlen der $\boldsymbol{\delta m} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty) \subseteq \boldsymbol{M}$, dass

$$
\boldsymbol{z}_1(0) = \boldsymbol{z}_2
$$

und somit kann $\boldsymbol{z}_2$ durch den Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{z}_1$ bestimmt werden, vgl. [Gun03, Abschnitt 2.6]. Da dieser Lagrange-Multiplikator im Folgenden keine Rolle spielt, wird er nicht mehr erwähnt.

An dieser Stelle soll in einer kurzen Bemerkung auf die geometrischen Aspekte der Optimalitätsbedingung (2.13b) eingegangen werden:

Bemerkung: (Orthogonalität)
Aus der Optimalitätsbedingung (2.13b) folgt für die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$, dass

$$\boldsymbol{u}^* - \Delta \boldsymbol{u}^* \perp \boldsymbol{z}_1, \quad \boldsymbol{u}^* - \Delta \boldsymbol{u}^* \perp \boldsymbol{m}^*.$$

Schreibt man dagegen im Funktional des Grundmodells statt $\lambda \left\| \boldsymbol{u} \right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}^2$ den Term

$$\lambda_1 \left\| \boldsymbol{u} \right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}^2 + \lambda_2 \left\| \nabla \boldsymbol{u} \right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)}^2 ,$$

so erhält man analog alle bisher benötigten Schranken an die Kontrolle $\boldsymbol{u}$ und für eine entsprechend kleine Wahl von λ_2 erhielte man annähernd

$$\boldsymbol{u}^* \perp \boldsymbol{z}_1, \quad \boldsymbol{u}^* \perp \boldsymbol{m}^*.$$

2.3 Regularität der Adjungierten $\boldsymbol{z}_1$

Aus dem Lagrange-Multiplikatoren-Satz erhält man die Adjungierte $\boldsymbol{z}_1 \in \boldsymbol{Z}_1^* = L^2(\boldsymbol{L}^2)$, jedoch lassen sich aus der Adjungiertengleichung (2.13c) und $\boldsymbol{z}_1(T) = \boldsymbol{0}$ höhere Regularitäten herleiten.

Lemma 2.8
Sei $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ eine Lösung von Problem 2.1.
Dann besitzt die Lösung $\boldsymbol{z}_1$ der Adjungiertengleichung (2.13c) mit $\boldsymbol{z}_1(T) = \boldsymbol{0}$ folgende Regularität:

$$\boldsymbol{z}_1 \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty).$$

Beweis:
Da $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ eine Lösung von Problem 2.1 ist, erfüllt das Tupel insbesondere die LLG, (1.1), und damit gelten nach Korollar 1.9 die Regularitäten

$$\boldsymbol{m}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^3) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1), \quad \boldsymbol{u}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^1).$$

Schritt 1: Teste (2.13c) formal mit $\boldsymbol{z}_1$:
Erhalte mit den Regeln des Kreuzproduktes

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \alpha \left\| \nabla \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \\
&= (\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{z}_1) + \alpha(\boldsymbol{z}_1, |\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \boldsymbol{z}_1) + 2\alpha \left(\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{z}_1 \rangle \boldsymbol{m}^*\right) + (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{z}_1) \\
&=: I_1 + \alpha I_2 + 2\alpha I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Betrachte die Terme einzeln:

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \frac{1}{2} \left\| \widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^* \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 , \\
I_2 &\le \left\| \nabla \boldsymbol{m}^* \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 \left\| \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 , \\
I_3 &\le C(\sigma) \left\| \nabla \boldsymbol{m}^* \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 \left\| \boldsymbol{m}^* \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 \left\| \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \sigma \left\| \nabla \boldsymbol{z}_1 \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 ,
\end{aligned}$$

$$I_4 = -(\boldsymbol{z}_1, \nabla \boldsymbol{m}^* \times \nabla \boldsymbol{z}_1) \leq C(\sigma) \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere in der Zeit rückwärts von t bis T und erhalte mit $\boldsymbol{z}_1(T) = \mathbf{0}$, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|\boldsymbol{z}_1(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \int_t^T \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq \int_t^T \left(\frac{1}{2} + C \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\right) \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2} \int_0^T \|\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}$$

Mit der Regularität $\boldsymbol{z}_1 \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ und $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$ erhält man

$$\|\boldsymbol{z}_1\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Schritt 2: Teste (2.13c) formal mit $-\Delta \boldsymbol{z}_1$:
Erhalte

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad = (\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*, -\Delta \boldsymbol{z}_1) + \alpha(\boldsymbol{z}_1, -|\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \Delta \boldsymbol{z}_1) + 2\alpha(\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, -\nabla \Delta \boldsymbol{z}_1 \rangle \boldsymbol{m}) \\
&\qquad\quad + (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \Delta(-\Delta \boldsymbol{z}_1)) + (\boldsymbol{z}_1, -\Delta \boldsymbol{z}_1 \times \Delta \boldsymbol{m}^*) + (\boldsymbol{z}_1, -\Delta \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{u}^*) \\
&\qquad =: I_1 + \alpha I_2 + 2\alpha I_3 + I_4 + \ldots + I_6.
\end{aligned}$$

Betrachte die Terme einzeln, verwende partielle Integration, die Rechenregeln des Kreuzproduktes und $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C(\sigma) \|\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_2 &\leq C(\sigma) \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_3 &= (\nabla \boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \Delta \boldsymbol{z}_1 \rangle \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{z}_1, \langle \Delta \boldsymbol{m}^*, \Delta \boldsymbol{z}_1 \rangle \boldsymbol{m}^*) + (\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \Delta \boldsymbol{z}_1 \rangle \nabla \boldsymbol{m}^*) \\
&\leq C(\sigma) \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\Delta \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad + C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}^*\|^4_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_4 &= -2(\nabla \boldsymbol{z}_1, \nabla \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{z}_1) - (\boldsymbol{z}_1, \Delta \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{z}_1) \\
&\leq 2 \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{m}^*\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\boldsymbol{z}_1\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\Delta \boldsymbol{m}^*\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_5 &\leq C(\sigma) \|\Delta \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \|\Delta \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \|\Delta \boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_6 &\leq C(\sigma) \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\Delta \boldsymbol{z}_1\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, integriere in der Zeit rückwärts von t bis T und erhalte da $\boldsymbol{z}_1(T) = \nabla \boldsymbol{z}_1(T) = \mathbf{0}$ für

$$a := C \|\boldsymbol{m}^*\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} + C \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},$$

$$b := C \left\|\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\boldsymbol{m}^*\right\|^4_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\boldsymbol{m}^*\right\|^2_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ + C \left\|\boldsymbol{u}^*\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}$$

folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \left\|\nabla \boldsymbol{z}_1(t)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \int_t^T \left\|\Delta \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \leq \int_t^T a \left\|\nabla \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \int_0^T b \,\mathrm{d}s.$$

Mit $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$, $\boldsymbol{u}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$ und Schritt 1 ergibt sich

$$\left\|\nabla \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \left\|\Delta \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C \left(\left\|\boldsymbol{u}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T \right).$$

Schritt 3: Teste (2.13c) formal mit $\boldsymbol{z}_{1_t}$:
Erhalte

$$\begin{aligned} &- \left\|\boldsymbol{z}_{1_t}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \left\|\nabla \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &= (\widetilde{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{z}_{1_t}) + \alpha(\boldsymbol{z}_1, |\nabla \boldsymbol{m}^*|^2 \boldsymbol{z}_{1_t}) + 2\alpha(\boldsymbol{z}_1, \langle \nabla \boldsymbol{m}, \nabla \boldsymbol{z}_{1_t} \rangle \boldsymbol{m}^*) + (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \Delta \boldsymbol{z}_{1_t}) \\ &\quad + (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_{1_t} \times \Delta \boldsymbol{m}^*) + (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_{1_t} \times \boldsymbol{u}^*) \\ &=: I_1 + \alpha I_2 + \alpha I_3 + I_4 + \ldots + I_6. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen verlaufen analog zu Schritt 2, setze $\boldsymbol{z}_{1_t}$ statt $\Delta \boldsymbol{z}_1$. Beim Term I_4 erhalte jedoch einen zusätzlichen Term, schätze daher I_4 wie folgt ab:

$$\begin{aligned} I_4 &= (\Delta \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{z}_{1_t}) + 2(\nabla \boldsymbol{z}_1, \nabla \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{z}_{1_t}) + (\boldsymbol{z}_1, \Delta \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{z}_{1_t}) \\ &\leq C(\sigma) \left\|\Delta \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^*\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\quad + C(\sigma) \left\|\Delta \boldsymbol{m}^*\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{z}_1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\boldsymbol{z}_{1_t}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Mit $\boldsymbol{m}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$, $\boldsymbol{u}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^1)$ und Schritt 1, 2 erhalte

$$\left\|\boldsymbol{z}_{1_t}\right\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C \left(\left\|\boldsymbol{u}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T \right).$$

Die Einbettungen ergeben sich aus den Lemmata 0.8 und 0.2. □

2.4 Bessere Regularität der optimalen Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$

Analog zu Abschnitt 2.3 erhält man aus der Optimalitätsbedingung (2.13b) höhere Regularitäten für optimale Kontrollen $\boldsymbol{u}^* \in \boldsymbol{U}$.

Proposition 2.9
Sei $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ eine Lösung von Problem 2.1.
Dann besitzt die optimale Kontrolle $\boldsymbol{u}^*$ folgende Regularität:

$$\boldsymbol{u}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1).$$

Beweis:
Schritt 1: Multipliziere (2.13b) mit $\boldsymbol{u}^*$, integriere im Raum und erhalte

$$\begin{aligned}\lambda \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \lambda \|\nabla \boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= (\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*) \\ &\leq C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_1\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \|\boldsymbol{u}^*\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und erhalte mit Lemma 2.8 und Korollar 1.9

$$\|\boldsymbol{u}^*\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\nabla \boldsymbol{u}^*\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Analog ergibt sich bei Multiplikation von (2.13b) mit $-\Delta \boldsymbol{u}^*$

$$\|\nabla \boldsymbol{u}^*\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} + \|\Delta \boldsymbol{u}^*\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Schritt 2: Leite die Optimalitätsbedingung (2.13b) formal nach der Zeit ab:

$$\lambda \boldsymbol{u}^*_t - \lambda \Delta \boldsymbol{u}^*_t = \boldsymbol{z}_{1_t} \times \boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{m}^*_t.$$

Multipliziere mit $\boldsymbol{u}^*_t$, integriere über Ort und Zeit und erhalte

$$\begin{aligned}&\lambda \|\boldsymbol{u}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \lambda \|\nabla \boldsymbol{u}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \\ &\qquad = \int_0^T (\boldsymbol{z}_{1_t} \times \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*_t)\, \mathrm{d}s + \int_0^T (\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{m}^*_t, \boldsymbol{u}^*_t)\, \mathrm{d}s \\ &\qquad \leq C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_{1_t}\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + C(\sigma) \|\boldsymbol{z}_1\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{m}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \sigma \|\boldsymbol{u}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)},\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und mit Lemma 2.8 und Korollar 1.9 folgt

$$\|\boldsymbol{u}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \|\nabla \boldsymbol{u}^*_t\|^2_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Die Einbettung ergibt sich aus Lemma 0.8. □

3 Semidiskretisierung LLG in der Zeit

In diesem Kapitel soll eine semi-implizite Zeitdiskretisierung der LLG, wie in der Einleitung bereits vorgestellt, auf Existenz einer Lösung und Stabilität untersucht werden. Die betrachtete semidiskretisierte LLG lautet dabei wie folgt:

Die semidiskrete Magnetisierung $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$ erfülle für eine feste semidiskrete Kontrolle $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J \subseteq \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ folgende semidiskrete LLG:

$$d_t\boldsymbol{m}^{j+1} - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^{j+1} = \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1} \times \Delta\boldsymbol{m}^{j+1} + \boldsymbol{m}^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{m}^0 = \boldsymbol{m}_0. \tag{3.1b}$$

Im ersten Abschnitt wird die Existenz einer Lösung mit Iterierten $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J \subseteq \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ für eine Menge beschränkter Kontrollen $\left\{\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J\right\}_{k>0} \subseteq \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ für k genügend klein analog zu Proposition 1.5 mit einer glatten Galerkin-Approximation im Ort bewiesen, vgl. Proposition 3.1.

Danach wird im zweiten Abschnitt eine Energieabschätzung und die Stabilität des Verfahrens für k klein genug hergeleitet. Wie bereits in der Einleitung diskutiert, ist es nicht gelungen die Stabilität kanonisch durch Testen der semidiskreten LLG, (3.1), zu erhalten, da das gewählte Verfahren im Gegensatz zur kontinuierlichen Form (1.1) nicht längenerhaltend ist. Daher werden mit Hilfe eines Störargumentes, eines Ansatzes wie in [Rul96] und der höheren Regularitäten des Zustandes $\boldsymbol{m}$ aus Korollar 1.9 Schranken für die Semidiskretisierung gezeigt (vgl. Theorem 3.2, Korollar 3.3). Anschließend wird die in Korollar 3.3 gezeigte Stabilität verwendet, um kanonisch bessere Schranken für die semidiskreten Zustände der LLG zu erhalten (vgl. Lemma 3.4), die in Kapitel 5 beim Grenzübergang des Optimalitätssystems benötigt werden.
Zudem wird am Ende des zweiten Abschnittes ein Ergebnis zur approximativen Längengerhaltung der semidiskreten Lösung gegeben.

3.1 Existenz einer Lösung der semidiskreten LLG

Die folgende Proposition verläuft analog zu Proposition 1.5 und sichert die Existenz einer Lösung von (3.1) für eine feste semidiskrete Kontrolle.

Proposition 3.1
Sei $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\left\{\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J\right\}_{k>0}$ eine Menge semidiskreter Kontrollen mit $k\sum_{j=1}^J \|\boldsymbol{u}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq K$, unabhängig von k.
Dann gibt es ein $k_0 = k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\right) > 0$, sodass für $k \leq k_0$ eine Lösung $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J \subseteq \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ von (3.1) existiert.

Beweis:
Schritt 1: Existenz einer lokalen Lösung nach einem glatten Galerkin-Ansatz im Ort: Sei $\{\boldsymbol{\varphi}_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1)$ (konstruiere diese beispielsweise aus periodischen Eigenfunktionen von $-\Delta$, [Eva10, Abschnitt 6.5]) und $\boldsymbol{V}_N$ der Aufspann über $\mathbb{R}$ der Basiselemente $\{\boldsymbol{\varphi}_l\}_{l=1}^N$. Definiere weiter

$$\boldsymbol{m}_N^{j+1} := \sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l.$$

Dann lautet das im Ort diskretisierte und zu (3.1) analoge Problem in der schwachen Formulierung:
Gesucht sind für $l = 1, \ldots, N$ Werte $b_l \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in V_N$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{m}_N^{j+1} - \frac{1}{k}\boldsymbol{m}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \alpha\left(\nabla \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \nabla\boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\quad = \alpha\left(|\nabla \boldsymbol{m}^j|^2 \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \left(\boldsymbol{m}_N^{j+1} \times \nabla \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \nabla\boldsymbol{\varphi}\right) + \left(\boldsymbol{m}_N^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Analog lautet dies: Gesucht ist $b \in \mathbb{R}^N$, sodass für $i = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned}
g_i(b) := &\left(\frac{1}{k}\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l - \frac{1}{k}\boldsymbol{m}^j, \boldsymbol{\varphi}_i\right) + \alpha\left(\sum_{l=1}^N b_l \nabla\boldsymbol{\varphi}_l, \nabla\boldsymbol{\varphi}_i\right) - \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2 \sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i\right) \\
&+ \left(\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l \times \sum_{l=1}^N b_l\nabla\boldsymbol{\varphi}_l, \nabla\boldsymbol{\varphi}_i\right) - \left(\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}_i\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Erhalte die Existenz einer Lösung $b \in \mathbb{R}^N$ aus einer Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, siehe [Růž04, Lemma 2.26]. Zeige dazu, dass $g_i, i = 1, \ldots, N$, stetig und

$$\exists R > 0 : \sum_{i=1}^N g_i(b) b_i \geq 0 \quad \text{für alle } b \text{ mit } |b| = R.$$

Die Stetigkeit der g_i ist offensichtlich. Verwende für die zweite Bedingung die $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$-Orthonormalität der $\{\boldsymbol{\varphi}_l\}_{l\in N}$, die Rechenregeln für das Kreuzprodukt und Gagliardo-Nirenberg, Korollar 0.6,

$$\begin{aligned}
&\alpha \left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{2}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\right)\left\|\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}\left\|\sum_{l=1}^N b_l\nabla\boldsymbol{\varphi}_l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}$$

und erhalte

$$\sum_{i=1}^N g_i(b)b_i = \frac{1}{k}\left(\sum_{l=1}^N b_l\boldsymbol{\varphi}_l - \boldsymbol{m}^j, \sum_{i=1}^N b_i\boldsymbol{\varphi}_i\right) + \alpha\left(\sum_{l=1}^N b_l\nabla\boldsymbol{\varphi}_l, \sum_{i=1}^N b_i\nabla\boldsymbol{\varphi}_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \alpha \left(|\nabla \boldsymbol{m}^j|^2 \sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l, \sum_{i=1}^N b_i \boldsymbol{\varphi}_i \right) + \left(\sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l \times \sum_{l=1}^N b_l \nabla \boldsymbol{\varphi}_l, \sum_{i=1}^N b_i \nabla \boldsymbol{\varphi}_i \right) \\
&- \left(\sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \sum_{i=1}^N b_i \boldsymbol{\varphi}_i \right) \\
&\geq \frac{1}{2k} \left\| \sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \frac{1}{2k} \left\| \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2k} \left\| \sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l - \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&+ \alpha \left\| \sum_{l=1}^N b_l \nabla \boldsymbol{\varphi}_l \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \alpha \left\| \nabla \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \sum_{l=1}^N b_l \boldsymbol{\varphi}_l \right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\geq \left(\frac{1}{2k} - \frac{\alpha}{2} \left\| \nabla \boldsymbol{m}^j \right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \frac{\alpha}{2} \right) \sum_{l=1}^N b_l^2 - \frac{1}{2k} \left\| \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2} \left\| \sum_{l=1}^N b_l \nabla \boldsymbol{\varphi}_l \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

für die Wahl $R = 1$ und $k \left(\|\boldsymbol{m}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \right)$ genügend klein, wähle demnach mit Lemma 3.4 die Konstante $k_0 = \left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \right)$ unabhängig von j klein genug.
Damit existiert eine Lösung $b \in \mathbb{R}^N$ und somit erhält man iterativ $\boldsymbol{m}_N^{j+1} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1)$, $j = 0, \dots, J-1$.

Schritt 2: Definition eines Kandidaten $\{\boldsymbol{m}_*^{j+1}\}_{j=0}^{J-1}$:
Im nächsten Abschnitt werden für k_0 genügend klein für die semidiskrete LLG Abschätzungen hergeleitet, da die Menge der Iterierten beschränkt ist. Korollar 3.3 liefert, da k fest ist, für $j = 0, \dots, J-1$ folgende von N unabhängige Schranke:

$$
\left\| \boldsymbol{m}_N^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C.
$$

Damit existieren für $j = 0, \dots, J-1$ nach Lemma 0.4 ein $\boldsymbol{m}_*^{j+1} \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ und eine Teilfolge, sodass für $N \to \infty$ gilt:

$$
\boldsymbol{m}_N^{j+1} \rightharpoonup \boldsymbol{m}_*^{j+1} \qquad \text{schwach in } \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)
$$

bzw. mit $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$, [Ada78, Theorem 4.12],

$$
\boldsymbol{m}_N^{j+1} \to \boldsymbol{m}_*^{j+1} \qquad \text{stark in } \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1).
$$

Schritt 3: $\{\boldsymbol{m}_*^{j+1}\}_{j=0}^{J-1}$ besitzt Lösungseigenschaft:
Zeige, dass mit den Schranken und Konvergenzen aus Schritt 2 für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1)$ und $N \to \infty$ gilt:

1. $\left(d_t \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right) \to \left(d_t \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right)$,
2. $\left(\Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right) \to \left(\Delta \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right)$,
3. $\left(|\nabla \boldsymbol{m}_N^j|^2 \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right) \to \left(|\nabla \boldsymbol{m}_*^j|^2 \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right)$,
4. $\left(\boldsymbol{m}_N^{j+1} \times \Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right) \to \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \Delta \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi} \right)$,

5. $\left(\boldsymbol{m}_N^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \to \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \boldsymbol{u}^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right)$,

wobei $\boldsymbol{m}_N^0 := \boldsymbol{m}^0$.

1., 2. und 5. sind wegen der schwachen Konvergenz klar.

Zu 3.:

$$\begin{aligned}
&\left(|\nabla \boldsymbol{m}_N^j|^2 \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \left(|\nabla \boldsymbol{m}_*^j|^2 \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\qquad = \left(|\nabla \boldsymbol{m}_N^j|^2 (\boldsymbol{m}_N^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1}), \boldsymbol{\varphi}\right) + \left(\langle \nabla \boldsymbol{m}_N^j, \nabla \boldsymbol{m}_N^j - \nabla \boldsymbol{m}_*^j \rangle \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\qquad\quad + \left(\langle \nabla \boldsymbol{m}_N^j - \nabla \boldsymbol{m}_*^j, \nabla \boldsymbol{m}_*^j \rangle \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\qquad \le \left\| \nabla \boldsymbol{m}_N^j \right\|_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}^2 \left\| \boldsymbol{m}_N^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad\quad + \left\| \nabla \boldsymbol{m}_N^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{m}_N^j - \nabla \boldsymbol{m}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}_*^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad\quad + \left\| \nabla \boldsymbol{m}_N^j - \nabla \boldsymbol{m}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{m}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}_*^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad \to 0 \qquad (\text{für } N \to \infty).
\end{aligned}$$

Zu 4.: Mit $\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{m}_N^{j+1} \times \Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \Delta \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\le \left((\boldsymbol{m}_N^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1}) \times \Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times (\Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1} - \Delta \boldsymbol{m}_*^{j+1}), \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\le \left\| \boldsymbol{m}_N^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1} \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} - \left(\Delta \boldsymbol{m}_N^{j+1} - \Delta \boldsymbol{m}_*^{j+1}, \boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\to 0 \qquad (\text{für } N \to \infty).
\end{aligned}$$

Damit liefert die Eindeutigkeit des Grenzwertes und das Fundamentallemma der Variationsrechnung, [Alt06, 2.21], für k genügend klein die Lösungseigenschaft von $\{\boldsymbol{m}_*^{j+1}\}_{j=0}^{J-1} \subseteq \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$.

□

Bemerkung: (semidiskrete Kontrollen $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J \subseteq \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$)
Für die kontinuierliche LLG konnte in Proposition 1.5 die Existenz einer starken Lösung bereits für eine Kontrolle $\boldsymbol{u} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ bewiesen werden. Im semidiskreten Fall ist nicht klar, ob eine Lösung für $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J \subseteq \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ existiert, da es nicht möglich war mit dieser schwächeren Regularität Schranken für die Kandidaten der Galerkin-Approximation zu zeigen.

3.2 Stabilität der semidiskreten Zustände $\boldsymbol{m}^j$

In diesem Abschnitt wird eine Energieabschätzung und Stabilität für die semidiskrete LLG, (3.1), hergeleitet. Dabei wird in einem ersten Schritt der Fehler $\boldsymbol{e}^j := \boldsymbol{m}(t_j) - \boldsymbol{m}^j$ untersucht und anschließend, da die Stabilität von $\boldsymbol{m}$ hinreichend bekannt ist, siehe Lemmata 1.6 bis 1.8, werden sich daraus Schranken für die semidiskreten Zustände $\boldsymbol{m}^j$ ergeben.

Bemerkung:
In dem folgenden Theorem wird die hohe Regularität von $\boldsymbol{m} \in H^1(\boldsymbol{H}^1) \cap \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^1)$ ausgenutzt, da sich damit nach Lemma 0.16 folgende benötigte Abschätzungen ergeben:

$$\left\| \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{m} \right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)}, \left\| \boldsymbol{m}^- - \boldsymbol{m} \right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)} \leq kC\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T \right).$$

Da der Beweis des folgenden Theorems sehr technisch und langwierig ist, soll zu Beginn des Beweises die Grundidee kurz erläutert werden.

Theorem 3.2
Sei $\boldsymbol{m}^0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\left\{ \{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J \right\}_{k>0}$ eine Menge semidiskreter Kontrollen mit $k\sum_{j=1}^J \|\boldsymbol{u}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq K$, unabhängig von k.
Weiter sei $\boldsymbol{m}$ die kontinuierliche Lösung von (1.1) mit kontinuierlicher Kontrolle $\boldsymbol{\mathcal{U}}^+$ zum Anfangswert $\boldsymbol{m}^0$ und $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$ die semidiskrete Lösung von (3.1) mit diskreter Kontrolle $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J$ und Anfangsiterierten $\boldsymbol{m}^0$.
Dann existieren $k_0 = k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\right) > 0$ und $C = C\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\right)$, sodass für $k \leq k_0$ gilt:

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\| \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1} \left\| \nabla \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq kC,$$
$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\| \nabla \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1} \left\| \Delta \boldsymbol{m}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C.$$

Beweis:
Beweisidee: Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung um folgende Gleichung zu erhalten:

$$\|\boldsymbol{m}(t) - \boldsymbol{\mathcal{M}}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = 2\int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m}_t - \boldsymbol{\mathcal{M}}_t \right) \mathrm{d}s + 2\int_0^t \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{m}_t - \boldsymbol{\mathcal{M}}_t \right) \mathrm{d}s.$$

Setze die entsprechenden Gleichungen für $\boldsymbol{m}_t$ und $\boldsymbol{\mathcal{M}}_t$ ein und verarbeite die Terme auf der rechten Seite. Dabei entstehen einige Terme mit Vorzeichen und die restlichen Terme müssen alle einzeln abgeschätzt werden. Da dies nicht direkt möglich ist, wird eine Induktion über die Zeitpunkte t_j gemacht und verwendet, dass nach der Induktionsbehauptung Terme von den vorangegangen Zeitschritten beliebig klein bzw. beschränkt werden können.

Aus Platzgründen schreibe in diesem Beweis $C(\boldsymbol{m}) := C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right)$.

Schritt 1: Definitionen und Aufstellen der abzuschätzenden Gleichung:
Die Semidiskretisierung (3.1) lautet stark formuliert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}}_t &= \alpha\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ + \alpha|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ \\ &=: \alpha B_1(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + \alpha B_2(\boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + B_3(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + B_4(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+) \\ &=: B(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Übertrage diese Terminologie direkt auf das kontinuierliche Problem (1.2),

$$\boldsymbol{m}_t = B(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+). \tag{3.3}$$

Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Definitionen aus (3.2) bzw. (3.3) und erhalte mit $\|\boldsymbol{m}(0)-\boldsymbol{\mathcal{M}}(0)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = \left\|\boldsymbol{m}(0)-\boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} = 0$ folgendes:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{m}(t)-\boldsymbol{\mathcal{M}}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= \int_0^t \frac{d}{ds}\|\boldsymbol{m}(s)-\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m}_t-\boldsymbol{\mathcal{M}}_t\Big)\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t \Big(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{m}_t-\boldsymbol{\mathcal{M}}_t\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, B(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})-B(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+,\boldsymbol{\mathcal{M}}^-,\boldsymbol{\mathcal{U}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\int_0^t \Big(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}, B(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\boldsymbol{u})-B(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+,\boldsymbol{\mathcal{M}}^-,\boldsymbol{\mathcal{U}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s \\
&=: 2A_1 + 2A_2.
\end{aligned}$$

Dabei müssen alle Terme einzeln abgeschätzt werden. Ziel ist dabei eine Ungleichung ähnlich der Form

$$\|\boldsymbol{m}(t_j)-\boldsymbol{\mathcal{M}}(t_j)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4}\int_0^{t_j}\left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s \leq \int_0^{t_j} X\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kY,$$

wobei $\boldsymbol{\mathcal{E}}^+$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}^-$ die konstanten Fortsetzungen von $\boldsymbol{e}^j$ bezeichnen, zu erhalten, um mit dem diskreten Gronwall-Lemma und einer Induktion über t_j arbeiten zu können. Das bedeutet, dass Terme, die kein $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}$ enthalten durch kC beschränkt werden müssen, damit das Induktionsargument funktioniert, das $\int_0^{t_j}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq kC$, $\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \leq C$ und $\int_0^{t_j}\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C$ benötigt.

Es wird sich zeigen, dass die Terme in A_1 schwieriger zu handhaben sind, als die Terme in A_2, da dort nach einer Umformulierung bereits jeder Term ein k besitzt.

Schritt 2: Schranken für $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}^+$ und $\boldsymbol{m}^-$:
Nach Korollar 1.9 ist $\boldsymbol{m} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^2)\cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$, daher sind $\boldsymbol{m}^+$,$\nabla\boldsymbol{m}^+$,$\Delta\boldsymbol{m}^+$ bzw. $\boldsymbol{m}^-$,$\nabla\boldsymbol{m}^-$, $\Delta\boldsymbol{m}^-$ wohldefiniert und es gilt:

$$\|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^2)}, \left\|\boldsymbol{m}^+\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^2)}, \|\boldsymbol{m}^-\|_{L^\infty(\boldsymbol{H}^2)} \leq C(\boldsymbol{m})$$

bzw. wie in der Bemerkung direkt vor diesem Theorem bereits angemerkt:

$$\left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)}, \|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^-\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{H}^1)} \leq kC(\boldsymbol{m}).$$

Schritt 3: Abschätzen von A_1:
Es ist mit der Definition von B aus (3.2) bzw. (3.3)

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha\int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, B_1(\boldsymbol{m})-B_1(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \alpha\int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, B_2(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})-B_2(\boldsymbol{\mathcal{M}}^-,\boldsymbol{\mathcal{M}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, B_3(\boldsymbol{m})-B_3(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, B_4(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\mathcal{U}}^+) - B_4(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+,\boldsymbol{\mathcal{U}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s\\
&=: \alpha A_{11} + \alpha A_{12} + A_{13} + A_{14}.
\end{aligned}
$$

Schätze diese Terme einzeln ab: Sei $\sigma > 0$.

Verwende für A_{11} partielle Integration und die umgekehrte Dreiecksungleichung, um einen Term mit Vorzeichen zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= -\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}(s) - \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\
&\le -\left(\int_0^t \left(\left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{m}(s)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right)^2\mathrm{d}s\right)\\
&= -\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + 2\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{m}(s)\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad - \int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{m}(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\
&\le -\frac{1}{2}\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}^+(s) - \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}(s) - \nabla\boldsymbol{m}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + kC(\boldsymbol{m}),
\end{aligned}
$$

das heißt der Term $\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s$ steht zur Absorption zur Verfügung.

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m} - |\nabla\boldsymbol{m}^-|^2\boldsymbol{m}^+\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-, 2\nabla\boldsymbol{m}^- - \nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\Big)\,\mathrm{d}s\\
&=: a + b + c,
\end{aligned}
$$

da

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla\boldsymbol{e}^j, 2\nabla\boldsymbol{m}(t_j) - \nabla\boldsymbol{e}^j\rangle &= \langle\nabla\boldsymbol{m}(t_j) - \nabla\boldsymbol{m}^j, \nabla\boldsymbol{m}(t_j) + \nabla\boldsymbol{m}^j\rangle\\
&= |\nabla\boldsymbol{m}(t_j)|^2 - |\nabla\boldsymbol{m}^j|^2.
\end{aligned}
$$

Einzeln abgeschätzt:

$$
\begin{aligned}
a &= \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}|^2(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^+)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle\nabla\boldsymbol{m}, \nabla\boldsymbol{m} - \nabla\boldsymbol{m}^-\rangle\boldsymbol{m}^+\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^t \Big(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle\nabla\boldsymbol{m} - \nabla\boldsymbol{m}^-, \nabla\boldsymbol{m}^-\rangle\boldsymbol{m}^+\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\le \int_0^t \left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^t \left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m} - \nabla\boldsymbol{m}^-\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^t \left\| \boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{m} - \nabla \boldsymbol{m}^- \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{m}^- \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s \\
&\leq kC(\boldsymbol{m}) + C(\boldsymbol{m}) \int_0^t \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s, \\
b = &\int_0^t \left\| \boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{m}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s \\
&\leq kC(\boldsymbol{m}) + C(\boldsymbol{m}) \int_0^t \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Unterteile den Term c wie folgt

$$
\begin{aligned}
c = &\int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-, 2\nabla \boldsymbol{m}^- \rangle \boldsymbol{m}^+ \right) \mathrm{d}s - \int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2 \boldsymbol{m}^+ \right) \mathrm{d}s \\
&- \int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-, 2\nabla \boldsymbol{m}^- \rangle \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right) \mathrm{d}s + \int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right) \mathrm{d}s \\
&=: c_1 + \ldots + c_4,
\end{aligned}
$$

wobei sich die Terme einzeln wie folgt abschätzen lassen:

$$
\begin{aligned}
c_1 &\leq \int_0^t \left\| \boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| 2\nabla \boldsymbol{m}^- \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s \\
&\leq kC(\boldsymbol{m}) + C(\sigma, \boldsymbol{m}) \int_0^t \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Beachte dabei, dass sich nicht nur $\int_0^t \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s$ absorbieren lässt, sondern auch $\int_0^t \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s$, da für $s \in (0, k]$ gilt:

$$
\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- = \nabla \boldsymbol{m}^0 - \nabla \boldsymbol{m}(0) = 0.
$$

Für die folgenden Abschätzungen verwende die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung, Lemma 0.6, um Teile der $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$-Norm zu erhalten:

Im Term c_2 verwende die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung wie folgt, um entsprechende Anteile absorbieren zu können:

$$
\begin{aligned}
\left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &\leq C \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^{\frac{1}{2}}_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^{\frac{2}{3}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^{\frac{4}{3}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^{\frac{4}{3}}_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C(\sigma) \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}
$$

und erhalte

$$
\begin{aligned}
c_2 = &\int_0^t \left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^+, |\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2 \boldsymbol{m}^+ \right) \mathrm{d}s + \int_0^t \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^+, |\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2 \boldsymbol{m}^+ \right) \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \left\| \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \boldsymbol{m}^+ \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\leq kC(\sigma,\boldsymbol{m})\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + 2\sigma\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ &+ C(\sigma,\boldsymbol{m})\int_0^t \left[1+\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right]\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.\end{aligned}$$

In Term c_3 spalte den gesamten Term $\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}$ ab und verwende danach Gagliardo-Nirenberg:

$$\begin{aligned}c_3 &\leq \int_0^t \left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|2\nabla\boldsymbol{m}^-\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\leq C\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\ &\leq C\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{m}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &+C(\sigma)\int_0^t \left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ &+2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}(s)-\nabla\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ &\leq C(\sigma,\boldsymbol{m})\int_0^t \left[\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+1\right]\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + kC(\sigma,\boldsymbol{m}) + 3\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\end{aligned}$$

und analog spalte in Term c_4 den gesamten Teil $\|\boldsymbol{m}(s)-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}$ ab und verwende danach für diesen und $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}$ Gagliardo-Nirenberg:

$$\begin{aligned}c_4 &\leq \int_0^t \left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\leq C\int_0^t \left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\ &+C\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\leq C(\sigma)\int_0^t \left\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)\int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ &+2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{m}-\nabla\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\ &+C(\sigma)\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^8_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\leq kC(\sigma,\boldsymbol{m}) + C(\sigma)\int_0^t \left[1+\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^8_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\right]\left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Verwende für A_{13} und A_{14} die Eigenschaften des Kreuzproduktes, um die Terme zu vereinfachen, sowie partielle Integration:

$$\begin{aligned}A_{13} &= \int_0^t \left(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\times\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right)\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^t \left(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \nabla\boldsymbol{m}\times\left(\nabla\boldsymbol{m}-\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right)\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C(\sigma)\int_0^t \left\|\boldsymbol{m}(s) \pm \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla \boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \sigma \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{m} \pm \nabla \boldsymbol{m}^+ - \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq kC(\boldsymbol{m}) + C(\sigma,\boldsymbol{m})\int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + 2\sigma\int_0^t \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

und

$$A_{14} = 0.$$

Schritt 4: Abschätzen von A_2:
Es gilt für $s \in (t_j, t_{j+1}]$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(s) - \boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = (t_{j+1} - s)B(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+),$$

da

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) &= \frac{s-t_j}{k}\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \pm \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ + \frac{t_{j+1}-s}{k}\boldsymbol{\mathcal{M}}^- \\
&= \frac{s-t_{j+1}}{k}(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^-) + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ = (s-t_{j+1})\boldsymbol{\mathcal{M}}_t + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich für den Term A_2 folgende Umformulierung:

$$
\begin{aligned}
A_2 = \int_0^t (s^+ - s)\Big(&\alpha B_1(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + \alpha B_2(\boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + B_3(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) + B_4(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+), \\
&\alpha B_1(\boldsymbol{m}) + \alpha B_2(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) + B_3(\boldsymbol{m}) + B_4(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+) \\
&-\alpha B_1(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) - \alpha B_2(\boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+) - B_3(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) - B_4(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}}^+)\Big)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

wobei mit s^+ die konstante Fortsetzung der $\{t_j\}_{j=0}^J$ bezeichnet wird. Das ergibt 16 verschiedene Terme, die mit A_{2ij} nummeriert werden, was bedeutet, dass im ersten Argument der Term $B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ und im zweiten Argument der Term $B_j(\boldsymbol{m}) - B_j(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ steht. Sei weiter $t = t_l$ für ein $1 \leq l \leq J$.

Zwei Dinge vereinfachen die Abschätzungen: Zum einen gilt $s^+ - s \leq k$ und daher besitzt jeder Term eine Kleinheit k, zum anderen entsteht bei den Termen der Gestalt A_{2ii} ein Term mit Vorzeichen, der zum Absorbieren zur Verfügung steht.

Betrachte zunächst die Terme der Gestalt A_{2ii}:
Mit

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s^+ - s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}k^2$$

ergibt sich unter Ausnutzung, dass $B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ stückweise konstant ist:

$$A_{2ii} = \int_0^t (s^+ - s)\,(B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}}), B_i(\boldsymbol{m}))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (s^+ - s)\,\|B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t (s^+ - s)\left(B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}}), B_i(\boldsymbol{m})\right)\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{l} \left\|B_i(\boldsymbol{m}^j)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s^+ - s)\mathrm{d}s \\
&\le k \int_0^t \|B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|B_i(\boldsymbol{m})\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}k \int_0^t \|B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le k \int_0^t \|B_i(\boldsymbol{m})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} - \frac{1}{4}k \int_0^t \|B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s \\
&\le kC(\boldsymbol{m}) - \frac{1}{4}k \int_0^t \|B_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,.
\end{aligned}
$$

D.h. folgende Terme stehen durch $A_{211} - A_{244}$ zudem zum Absorbieren zur Verfügung:

$$
\begin{gathered}
k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\ k \int_0^t \left\||\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\ k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.
\end{gathered}
$$

Schätze die restlichen Terme einzeln ab:

$$
\begin{aligned}
A_{212} = &\int_0^t (s^+ - s)\left(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m} - |\nabla\boldsymbol{m}^-|^2\boldsymbol{m}^+\right)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (s^+ - s)\left(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (s^+ - s)\left(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-, 2\nabla\boldsymbol{m}^-\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right)\mathrm{d}s \\
&- \int_0^t (s^+ - s)\left(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right)\mathrm{d}s \\
=:&\ a + b + c - d.
\end{aligned}
$$

Schätze diese Terme einzeln ab

$$
\begin{aligned}
a &\le k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left(\|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \|\nabla\boldsymbol{m}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\right)\mathrm{d}s \\
&\le \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma, \boldsymbol{m}), \\
b &\le k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\nabla\boldsymbol{m}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s \\
&\le \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma, \boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Verwende in Term c

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} &\le C\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\le C\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\|\Delta\boldsymbol{m}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}
$$

damit ergibt sich

$$
c \le \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-, 2\nabla\boldsymbol{m}^-\rangle\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \pm \boldsymbol{m}^+\right)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{m}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{m}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma, \boldsymbol{m}) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma, \boldsymbol{m}) k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + C(\sigma, \boldsymbol{m}) k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma, \boldsymbol{m}) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Für Term d verwende Gagliardo-Nirenberg, Korollar 0.6, für

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} &\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \pm \Delta \boldsymbol{m}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} &\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^- \pm \boldsymbol{m}^-\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq C \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^6_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma \left\|\Delta \boldsymbol{m}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}
$$

sowie die Ungleichung

$$
\int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k \left\|\Delta \boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.
$$

Dann lässt sich d wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
d &\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) k \int_0^t \left\| |\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-|^2 \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \pm \boldsymbol{m}^+\right)\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\leq 3\sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma, \boldsymbol{m}) k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + C(\sigma, \boldsymbol{m}) \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\sigma, \boldsymbol{m}) \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^4_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} k \int_0^t \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\boldsymbol{m}) k.
\end{aligned}
$$

Die restlichen Terme lassen sich unkompliziert abschätzen, oft unter Verwendung der Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

$$
A_{213} = \int_0^t (s^+ - s) \left(\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m}\right) \leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k C(\boldsymbol{m}),
$$

$$
\begin{aligned}
A_{214} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right)\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{m}^+ + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma,\boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)},\\
A_{221} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \Delta\boldsymbol{m}\right) - \int_0^t (s^+ - s)\left(|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m}, \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right) + A_{212}\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\||\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}) + A_{212},\\
A_{223} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m} \times \Delta\boldsymbol{m}\right) \leq \sigma k \int_0^t \left\||\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}),\\
A_{224} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right)\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\||\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma,\boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
A_{231} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \Delta\boldsymbol{m}\right) \leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}),\\
A_{232} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m}\right) \leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}),\\
A_{234} &\leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{m}^+ - \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma,\boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
A_{241} &\leq k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\Delta\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k \int_0^t \left\|\pm\boldsymbol{m}^+ + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}) + C(\sigma,\boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + \sigma k \int_0^t \left\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},\\
A_{242} &= \int_0^t (s^+ - s)\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+, |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m}\right)\mathrm{d}s \leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}),\\
A_{243} &\leq k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m} \times \Delta\boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + k \int_0^t \left\|\pm\boldsymbol{m}^+ + \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\leq \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC(\sigma,\boldsymbol{m}) + C(\sigma)k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{E}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\
&\quad + C(\sigma,\boldsymbol{m})k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \sigma k \int_0^t \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}
$$

Schritt 5: Zusammenfassung der bisheringen Abschätzungen:

Absorbiere für σ genügend klein und erhalte für

$$\begin{aligned}
A &= C(\boldsymbol{m}) + Ck \left\| \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}, \\
B &= C(\boldsymbol{m}) \left[\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^8_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right] \\
&\quad + kC(\boldsymbol{m}) \left[\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right], \\
C^j &= kC(\boldsymbol{m}) + kC \left\| \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ \right\|^2_{L^2(\boldsymbol{H}^1)} = k\widetilde{C}, \\
D^j &= kC(\boldsymbol{m}) \int_0^{t_j} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + C(\boldsymbol{m})k \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \int_0^{t_j} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + C(\boldsymbol{m})k \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^4_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \int_0^{t_j} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
A^{j+1} &= C(\boldsymbol{m}) + Ck \left\| \boldsymbol{u}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}, \\
B^{j+1} &= C(\boldsymbol{m}) \left[\left\| \nabla \boldsymbol{e}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\| \nabla \boldsymbol{e}^j \right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\| \nabla \boldsymbol{e}^j \right\|^8_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right] \\
&\quad + kC(\boldsymbol{m}) \left[\left\| \Delta \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\| \nabla \boldsymbol{e}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\| \Delta \boldsymbol{m}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right]
\end{aligned}$$

folgende Ungleichung zum Zeitpunkt $t = t_j$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \boldsymbol{e}^j \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4} k \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \nabla \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8} k^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \Delta \boldsymbol{m}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&= \|\boldsymbol{m}(t_j) - \boldsymbol{\mathcal{M}}(t_j)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4} \int_0^{t_j} \left\| \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}^+(s) \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8} k \int_0^{t_j} \left\| \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \int_0^{t_j} (A + B) \left\| \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + kC^j + D^j \\
&\leq k \sum_{i=0}^{j-1} \left(A^{i+1} + B^{i+1} \right) \left\| \boldsymbol{e}^{i+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\widetilde{C} + D^j,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei B bzw. B^{j+1} und D^j von $\boldsymbol{\mathcal{E}}^-$ abhängen.

Schritt 6: Induktionsbehauptung:
Es existieren $C_i = C_i(\mathbb{S}^1, T, \alpha, \boldsymbol{m}), i = 1, 2$, sodass für $0 \leq l \leq J-1$ gilt:

$$\max_{0 \leq j \leq l} \left\| \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4} k \sum_{j=0}^{l} \left\| \nabla \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{8} k^2 \sum_{j=0}^{l} \left\| \Delta \boldsymbol{m}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq kC_1 e^{C_2 t_l},$$

also insbesondere

$$\max_{0 \leq j \leq l} \left\| \nabla \boldsymbol{e}^{j+1} \right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C_1 e^{C_2 t_l}.$$

Schritt 7: Induktionsanfang für $l = 0$:
Setze $t_j = t_1$ in (3.4) und erhalte mit $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}^- = \mathbf{0}$ in $(0, t_1]$:

$$\left\|\boldsymbol{e}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4}k\left\|\nabla\boldsymbol{e}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8}k^2\left\|\Delta\boldsymbol{m}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le kA^1\left\|\boldsymbol{e}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\widetilde{C}.$$

Da

$$kA^1 \le kC(\boldsymbol{m}) + Ck^2\sum_{j=1}^{J}\left\|\boldsymbol{u}^j\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} =: k\widetilde{A},$$

wähle $k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, \boldsymbol{m}\right)$ klein genug, absorbiere und erhalte

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4}k\left\|\nabla\boldsymbol{e}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8}k^2\left\|\Delta\boldsymbol{m}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le k\widetilde{C}.$$

Definiere $C_i\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, \boldsymbol{m}\right), i = 1, 2$, wie folgt:

$$C_1 := 3\widetilde{C}e^2(\widetilde{A}T + 1), \quad C_2 := 2\widetilde{A}.$$

Damit gilt der Induktionsanfang.

Schritt 8: Induktionsschritt: $l \to l + 1$
Setze $t_j = t_{l+1}$ in (3.4) und verwende die Induktionsvoraussetzung um gewisse Kleinheiten zu generieren. Erhalte

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4}k\sum_{j=0}^{l}\left\|\nabla\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8}k^2\sum_{j=0}^{l}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}&\\ \le k\sum_{j=0}^{l}\left(A^{j+1} + B^{j+1}\right)\left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\widetilde{C} + D^{l+1},&\end{aligned}$$

wobei für D^{l+1} nach der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}D^{l+1} &= C(\boldsymbol{m})k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + C(\boldsymbol{m})\max_{0\le j\le l}\left\|\nabla\boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\quad + C(\boldsymbol{m})\max_{0\le j\le l}\left\|\nabla\boldsymbol{e}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\le C(\boldsymbol{m})k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s + C(\boldsymbol{m})C_1e^{C_2T}k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s\\ &\quad + C(\boldsymbol{m})C_1^2e^{2C_2T}k\int_0^{t_{l+1}}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^-\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Wähle k_0 so klein, dass diese Terme absorbiert werden können. Es ist also

$$\left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le k\sum_{j=0}^{l}\left(A^{j+1} + B^{j+1}\right)\left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\widetilde{C}.$$

Es gilt nach der Induktionsvoraussetzung weiterhin, dass

$$\begin{aligned} kB^{l+1} &= kC(\sigma, \boldsymbol{m}) \left[\max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^l\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^l\right\|^8_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right] \\ &\quad + k^2 C(\boldsymbol{m}) \left[\left\|\Delta \boldsymbol{m}^l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^l\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right] \\ &\le kC(\boldsymbol{m}) \left[C_1 e^{C_2 T} + C_1^2 e^{2C_2 T} + C_1^4 e^{4C_2 T} \right]. \end{aligned}$$

Da $kA^{l+1} \le k\widetilde{A}$ ergibt das mit den Ergebnissen zu $k\widetilde{A}$ im Induktionsanfang, dass sich der $l+1$-te Term für k_0 genügend klein auf die linke Seite absorbieren lässt.

Wähle k_0 klein genug und erhalte

$$\frac{1}{2} \left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le k \sum_{j=0}^{l-1} \left(A^{j+1} + B^{j+1} \right) \left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k\widetilde{C}.$$

Das diskrete Gronwall-Lemma liefert nun (beachte, dass $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{0}$):

$$\left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le 2k\widetilde{C} e^{2k \sum_{j=0}^{l-1} (A^{j+1} + B^{j+1})}.$$

Zusammen mit

$$k \sum_{j=0}^{l-1} A^{j+1} \le \sum_{j=0}^{l-1} \widetilde{A} k = \widetilde{A} t_l$$

und

$$\begin{aligned} k \sum_{j=0}^{l-1} B^{j+1} &\le kC(\boldsymbol{m}) \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} kC(\boldsymbol{m}) \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\quad + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^6_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} kC(\boldsymbol{m}) \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + k^2 C(\boldsymbol{m}) \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\quad + \max_{0\le j\le l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} k^2 C(\boldsymbol{m}) \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\le kC(\boldsymbol{m}) \left[C_1 e^{C_2 T} + C_1^2 e^{2C_2 T} + C_1^4 e^{4C_2 T} \right] + \|\Delta \boldsymbol{m}_0\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left[Tk^2 + C(\boldsymbol{m}) C_1 e^{C_2 T} k^2 \right] \\ &\le 1, \end{aligned}$$

für k_0 klein genug, erhält man

$$\left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le 2k\widetilde{C} e^{2k \sum_{j=0}^{l-1} (A^{j+1} + B^{j+1})} \le [2k\widetilde{C} e^2] e^{2\widetilde{A} t_l}$$

bzw.

$$\left\|\boldsymbol{e}^{l+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{4} k \sum_{j=0}^{l} \left\|\nabla \boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \mathrm{d}s + \frac{\alpha}{8} k^2 \sum_{j=0}^{l} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{0\leq j\leq l} \left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} k\sum_{j=0}^{l}\left(A^{j+1}+B^{j+1}\right)+k\widetilde{C}\\
&\leq [2k\widetilde{C}e^2]e^{2\widetilde{A}t_l}(\widetilde{A}T+1)+k\widetilde{C}\\
&\leq kC_1e^{C_2t_l}.
\end{aligned}$$

□

Kombiniert mit der Stabilität der kontinuierlichen Lösung der LLG ergibt sich:

Korollar 3.3
Sei $\boldsymbol{m}^0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\left\{\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J\right\}_{k>0}$ eine Menge semidiskreter Kontrollen mit $k\sum_{j=1}^J \|\boldsymbol{u}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq K$, unabhängig von k.
Dann existiert ein $k_0 = k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\right) > 0$, sodass mit $k \leq k_0$ für die Lösung $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$ von (3.1) folgende Abschätzung gilt:

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Sei $\boldsymbol{m}$ die kontinuierliche Lösung von (1.1) mit Kontrolle $\boldsymbol{\mathcal{U}}^+$ zum Anfangswert $\boldsymbol{m}^0$.
Dann existiert nach Theorem 3.2 ein $C = C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right)$, sodass

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|\boldsymbol{m}(t_{j+1})-\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq C.$$

Zusammen mit $\boldsymbol{m} \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2)$ nach Korollar 1.9 ergibt

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq 2\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|\boldsymbol{m}(t_{j+1})-\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + 2\max_{0\leq j\leq J-1} \|\boldsymbol{m}(t_{j+1})\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}$$

die Behauptung. □

Für $\boldsymbol{m}^0 \in \boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)$ ergeben sich folgende bessere Schranken an die Zustände, die für den Grenzübergang der Optimalitätsbedingungen, Kapitel 5, benötigt werden:

Lemma 3.4
Sei $\boldsymbol{m}^0 \in \boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\left\{\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J\right\}_{k>0}$ eine Menge semidiskreter Kontrollen mit $k\sum_{j=1}^J \|\boldsymbol{u}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq K$, unabhängig von k.
Dann existiert ein $k_0 = k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}\right) > 0$, sodass mit $k \leq k_0$ für die Lösung $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$ von (3.1) folgende Abschätzung gilt:

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)} + k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|d_t\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Schritt 1: Aus (3.1a), Gagliardo-Nirenberg (Korollar 0.6) und Korollar 3.3 folgt:

$$
\begin{aligned}
&k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|d_t\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\qquad\le \alpha k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+\alpha k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\\
&\qquad\quad+Ck\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+Ck\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\qquad\le C\left(K,\|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)},T\right),
\end{aligned}
$$

für k genügend klein.

Schritt 2: Analog zu Beweis von Lemma 1.8 leite (3.1) formal im Ort ab:
Erhalte für $\boldsymbol{A}^j=\nabla\boldsymbol{m}^j$:

$$
\begin{aligned}
d_t\boldsymbol{A}^{j+1}-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}&=2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{A}^j,\nabla\boldsymbol{m}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}+\alpha|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{A}^{j+1}\\
&\quad+\boldsymbol{A}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}+\boldsymbol{m}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\\
&\quad+\boldsymbol{A}^{j+1}\times\boldsymbol{u}^{j+1}+\boldsymbol{m}^{j+1}\times\nabla\boldsymbol{u}^{j+1}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Multipliziere (3.5) mit $-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}$, integriere im Ort und erhalte mit den Rechenregeln des Kreuzproduktes:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d_t\left\|\nabla\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+\alpha\left\|\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\qquad\le 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{A}^j,\nabla\boldsymbol{m}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1},-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right)+\alpha\left(|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{A}^{j+1},-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right)\\
&\qquad\quad+\left(\boldsymbol{A}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1},-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right)+\left(\boldsymbol{A}^{j+1}\times\boldsymbol{u}^{j+1},-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right)\\
&\qquad\quad+\left(\boldsymbol{m}^{j+1}\times\nabla\boldsymbol{u}^{j+1},-\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right)\\
&\qquad=:2\alpha I_1+\alpha I_2+I_3+\ldots+I_5.
\end{aligned}
$$

Schätze die Terme einzeln ab, verwende dabei Gagliardo-Nirenberg, Korollar 0.6:

$$
\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\le C\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\le C\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+C\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
$$

und

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}&\le C\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}\\
&\le C\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+C\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^6_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}+\frac{1}{2}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
I_1&\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{A}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}+\sigma\left\|\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\\
&\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{A}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{A}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&+ \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} , \\
I_2 &\le C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le C(\sigma) \left(\left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \right) \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&+ C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2} \left\|\nabla \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&+ C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^6_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} , \\
I_3 &\le C(\sigma) \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le C(\sigma) \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C(\sigma) \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + 2\sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} , \\
I_4 &\le \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le C(\sigma) \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} , \\
I_5 &\le \left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le C(\sigma) \left\|\nabla \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\Delta \boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} ,
\end{aligned}
$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ genügend klein, multipliziere mit k, summiere von 0 bis l und erhalte mit

$$
\begin{aligned}
A^j &:= C \left\|\nabla \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^{j+2}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^{j+2}\right\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \frac{1}{2} \\
&+ C \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^6_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} , \\
B^l &:= Ck \sum_{j=0}^{l} \Big[\left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\nabla \boldsymbol{m}^j\right\|^3_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad + \left\|\Delta \boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta \boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad + \left\|\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \Big] \\
&\le \widetilde{C} \left(K, \left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \right) , \\
D &:= k \left(\left\|\nabla \boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^1\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + C \left\|\nabla \boldsymbol{m}^0\right\|^4_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^1\right\|^4_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \right) \left\|\Delta \boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&+ Ck \left\|\nabla \Delta \boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\le \widetilde{D} \left(K, \left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)} \right) ,
\end{aligned}
$$

wobei $\boldsymbol{m}^{J+1} = \boldsymbol{0}$ und D aus übrigen Termen aus I_1 besteht, folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{l+1}\right\|^2 + \frac{\alpha k}{2}\sum_{j=0}^{l}\left\|\nabla\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad \le k\sum_{j=0}^{l} A^j\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + B^l + D + \frac{1}{2}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad \le k\sum_{j=0}^{l} A^j\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \widetilde{C} + \widetilde{D} + \frac{1}{2}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^0\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}$$

Da kA^l nach Korollar 3.3 beliebig klein werden kann, erhalte mit dem diskreten Gronwall:

$$\max_{0\le j\le J-1}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2 + k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\nabla\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right),$$

für k genügend klein.

Schritt 3: Multipliziere (3.5) mit $d_t\boldsymbol{A}^{j+1}$, integriere im Ort und erhalte

$$\begin{aligned}
&\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \frac{\alpha}{2}d_t\left\|\nabla\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad \le 2\alpha\left(\langle\nabla\boldsymbol{A}^j, \nabla\boldsymbol{m}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) + \alpha\left(|\nabla\boldsymbol{m}^j|^2\boldsymbol{A}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) \\
&\qquad\quad + \left(\boldsymbol{A}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) + \left(\boldsymbol{m}^{j+1}\times\Delta\boldsymbol{A}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) \\
&\qquad\quad + \left(\boldsymbol{A}^{j+1}\times\boldsymbol{u}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) + \left(\boldsymbol{m}^{j+1}\times\nabla\boldsymbol{u}^{j+1}, d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right) \\
&\qquad =: 2\alpha I_1 + \alpha I_2 + I_3 + \ldots + I_6.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Schritt 2 lassen sich die Terme einzeln leicht abschätzen:

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C(\sigma)\left\|\Delta\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_2 &\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}^j\right\|^4_{\boldsymbol{L}^4(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_3 &\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_4 &\le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\nabla\Delta\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_5 &\le C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}, \\
I_6 &\le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma\left\|d_t\boldsymbol{A}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, multipliziere mit k und summiere. Mit Schritt 2 und Korollar 3.3 ergibt sich für k klein genug

$$k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|d_t\nabla\boldsymbol{m}^{j+1}\right\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le C\left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

□

Die Semidiskretisierung erhält die Länge approximativ im folgenden Sinne:

Korollar 3.5
Sei $\boldsymbol{m}^0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\left\{\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^J\right\}_{k>0}$ eine Menge semidiskreter Kontrollen mit $k\sum_{j=1}^J \|\boldsymbol{u}^j\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \leq K$, unabhängig von k.
Dann existiert ein $k_0 = k_0\left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}\right) > 0$, sodass mit $k \leq k_0$ für die Lösung $\{\boldsymbol{m}^j\}_{j=0}^J$ von (3.1) gilt:

$$\max_{0\leq j\leq J-1} \left\|1 - |\boldsymbol{m}^{j+1}|^2\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \leq \sqrt{k} C \left(K, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Löse $\boldsymbol{m}$ die Gleichung (1.1) zum Anfangswert $\boldsymbol{m}_0$ mit der Kontrolle $\boldsymbol{\mathcal{U}}^+$. Es ist

$$\begin{aligned}
\left\|1 - |\boldsymbol{m}^{j+1}|^2\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} &= \left\||\boldsymbol{m}(t_{j+1})| - |\boldsymbol{m}^{j+1}|^2\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&= \left\|\langle \boldsymbol{e}^{j+1}, \boldsymbol{e}^{j+1} - 2\boldsymbol{m}(t_{j+1})\rangle\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq 2\left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + C\left\|\boldsymbol{e}^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{m}(t_{j+1})\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}
\end{aligned}$$

Zusammen mit $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$ und Theorem 3.2 ergibt sich die Behauptung. □

4 Semidiskretes Optimierungsproblem

In diesem Kapitel soll das folgende zu Problem 2.1 analoge semidiskretisierte Optimierungsproblem für einen vorgegebenen Wunschzustand $\widetilde{\boldsymbol{m}}$ und Anfangszustand $\boldsymbol{m}_0$ des Ferromagneten mit einer festen Zeitschrittweite k untersucht werden:

Definiere dazu die Räume

$$\boldsymbol{M}_k := \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1}, \quad \boldsymbol{U}_k := \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)^J$$

und die Schreibweisen

$$\boldsymbol{M} := \left(\boldsymbol{m}^j\right)_{j=0}^J \in \boldsymbol{M}_k, \quad \boldsymbol{U} := \left(\boldsymbol{u}^j\right)_{j=1}^J \in \boldsymbol{U}_k$$

sowie das Funktional $F_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \mathbb{R}$,

$$F_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) := \frac{k}{2} \sum_{j=1}^J \left\| \boldsymbol{m}^j - \widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j) \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \frac{\lambda k}{2} \sum_{j=1}^J \left\| \boldsymbol{u}^j \right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 .$$

Damit lautet das semidiskretisierte Optimierungsproblem:

Problem 4.1
Seien $\widetilde{\boldsymbol{m}} : [0,T] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\lambda > 0$ gegeben.
Finde für festes $k > 0$ Funktionen $\boldsymbol{M}^* \in \boldsymbol{M}_k$ und $\boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{U}_k$, sodass

$$(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) = \underset{(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) \in \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k}{\operatorname{argmin}} F_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) \quad \text{u.d.N. (3.1).}$$

Dabei wird analog zu Kapitel 2 vorgegangen:

Der erste Abschnitt in diesem Kapitel wird die Existenz eines Minimums von Problem 4.1 für k genügend klein analog zum kontinuierlichen Fall, Proposition 1.5, mit Hilfe einer Minimalfolgenkonstruktion bewiesen. Hierbei zeigt sich, dass die $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$-Regularität der Iterierten notwendig ist, um nachzuweisen, dass das konstruierte Minimum die Nebenbedingung erfüllt; vgl. Beweis von Proposition 4.3.

Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, dass die optimalen semidiskreten Zustände und Kontrollen des Problems 4.1 für k genügend klein unabhängig von der Zeitschrittweite beschränkt sind. Dies wird in den nächsten Abschnitten benötigt, um die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren für das semidiskrete Optimalitätsproblem beweisen zu können und höhere Stabilitäten für die Adjungierte und die optimale Kontrolle zu erhalten.

Im dritten Abschnitt werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen eines Minimums (4.3) über den Lagrange-Multiplikatoren-Satz rigoros hergeleitet. Beim Nachweis der

Existenz der Lagrange-Multiplikatoren von Problem 4.1 wird auf Ergebnisse aus Lemma 2.7 verwiesen, da dort zum Nachweis der Lagrange-Multiplikatoren eine zeitliche Diskretisierung, die der Semidiskretisierung der LLG entspricht, verwendet wurde.

Anschließend werden im vierten Abschnitt höhere Stabilitäten der semidiskreten Adjungierten aus der Adjungiertengleichung (4.3c) unter Berücksichtigung der Stabiltät des semidiskreten Zustandes formal hergeleitet, vgl. Lemma 4.10.

Im letzten Abschnitt werden bessere Regularitäten der optimalen semidiskreten Kontrolle aus der Optimalitätsbedingung (4.3b) und den Regularitäten der semidiskreten Adjungierten bzw. des semidiskreten Zustandes geschlossen, vgl. Proposition 4.11.

4.1 Existenz eines Minimums

Zu Beginn sollen zwei Eigenschaften des Funktionals F_k erwähnt werden:

Lemma 4.2
Für das Funktional $F_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \mathbb{R}$ gilt:

1. F_k ist schwach unterhalbstetig auf $\boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k$,
2. F_k ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}&\langle F_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle\\&\quad= k\sum_{j=1}^{J}\Big(\boldsymbol{m}^j-\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j),\boldsymbol{\delta m}^j\Big)+\lambda k\sum_{j=1}^{J}\Big(\boldsymbol{u}^j,\boldsymbol{\delta u}^j\Big)+\lambda k\sum_{j=1}^{J}\Big(\nabla\boldsymbol{u}^j,\nabla\boldsymbol{\delta u}^j\Big).\end{aligned}$$

Beweis:
Für 1. siehe [Trö09, Satz 2.12] und für 2. siehe [Trö09, Abschnitt 2.6]. □

Zeige nun die Existenz einer Lösung von Problem 4.1.

Proposition 4.3
Es gibt ein $k_0(\widetilde{\boldsymbol{m}},T) > 0$, sodass für festes $k \le k_0$ mindestens eine Lösung $(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*) \in \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k$ des Problems 4.1 existiert.

Beweis:
Schritt 1: Konstruktion einer Minimalfolge:
Da $F_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) \ge 0$ und die Lösungsmenge der Nebenbedingung mindestens die triviale Lösung enthält, existiert ein Infimum F_k^* mit

$$0 \le F_k^* = \inf_{\substack{(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})\in\boldsymbol{M}_k\times\boldsymbol{U}_k\\ \text{u.d.N (3.1)}}} F_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) \le F_k(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \le \frac{T}{2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}.$$

Daher ist es möglich, eine minimierende Folge $(\boldsymbol{M}_l,\boldsymbol{U}_l)$ mit $F_k(\boldsymbol{M}_l,\boldsymbol{U}_l) \to F_k^*$ und

$$k\sum_{j=1}^{J}\left\|\boldsymbol{u}_l^j\right\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)} \le \frac{T}{2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}\right\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}$$

zu wählen.

Schritt 2: Konstruktion eines Kandidaten $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$:
Da die Kontrollen unabhängig von l beschränkt sind, gehe weiter analog zu Beweis von Proposition 3.1 vor und erhalte für $k_0(\widetilde{\boldsymbol{m}}, T)$ genügend klein (da die Menge der Kontrollen einheitlich für alle k beschränkt ist) ein $\boldsymbol{M}^* \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1}$ und $\boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)^J$, sodass für Teilfolgen und $j = 0, \dots, J-1$ mit $l \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_l^{j+1} &\rightharpoonup \boldsymbol{u}_*^{j+1} && \text{schwach in } \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1),\\
\boldsymbol{m}_l^{j+1} &\rightharpoonup \boldsymbol{m}_*^{j+1} && \text{schwach in } \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1),\\
\boldsymbol{m}_l^{j+1} &\to \boldsymbol{m}_*^{j+1} && \text{stark in } \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1).
\end{aligned}$$

Schritt 3: $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ ist zulässig:
Zeige analog zu Beweis von Proposition 3.1, dass $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ die Gleichung (3.1) erfüllt, verarbeite den Term mit der Kontrolle für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{S}^1)$ und $l \to \infty$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{m}_l^{j+1} \times \boldsymbol{u}_l^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \boldsymbol{u}_*^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&= \left((\boldsymbol{m}_l^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1}) \times \boldsymbol{u}_l^{j+1}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \left(\boldsymbol{m}_*^{j+1} \times (\boldsymbol{u}_l^{j+1} - \boldsymbol{u}_*^{j+1}), \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\le \left\|\boldsymbol{m}_l^{j+1} - \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{u}_l^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} - \left(\boldsymbol{u}_l^{j+1} - \boldsymbol{u}_*^{j+1}, \boldsymbol{m}_*^{j+1} \times \boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Da per Definition $\boldsymbol{m}_*^0 = \boldsymbol{m}_l^0 = \boldsymbol{m}^0$ ist somit die Nebenbedingung für $\boldsymbol{M}^*$ und $\boldsymbol{U}^*$ erfüllt.

Schritt 4: Da F_k nach Lemma 4.2 schwach unterhalbstetig ist, gilt:

$$F_k^* = \inf_{\substack{\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{U}_k \\ \text{u.d.N (3.1)}}} F_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) \le F_k(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) \le \varliminf_{l \to \infty} F_k(\boldsymbol{M}_l, \boldsymbol{U}_l) = F_k^*.$$

Also $F_k(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) = F_k^*$ und damit ist die Existenz eines Minimums bewiesen. □

Bemerkung: ($\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$-Schranken der semidiskreten LLG)
In Schritt 3 des vorangehenden Beweises muss gezeigt werden, dass das konstruierte $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ die Nebenbedingung (3.1) erfüllt. Dabei ist dies nur möglich, wenn die Minimalfolge der Zustände eine uniforme Schranke in $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ besitzt, da entweder Schranken in $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ und starke Konvergenz einer Teilfolge in $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ oder nach einer partiellen Integration starke Konvergenz einer Teilfolge in $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)$ benötigt werden.

4.2 Stabilität der optimalen Zustände und Kontrollen

Seien $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ Lösungen der Probleme 4.1 zu verschiedenen Zeitschrittweiten. Dann gilt für die optimalen Kontrollen:

Lemma 4.4
Es existiert eine Konstante C unabhängig von k, sodass für alle optimalen Kontrollen $\boldsymbol{U}^*$ von Problem 4.1 gilt:

$$k \sum_{j=1}^{J} \left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 \le C\,(\widetilde{\boldsymbol{m}}, T)\,.$$

Beweis:
Es ist

$$\frac{\lambda k}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 \leq F_k(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*)$$

und

$$F_k(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*) = \min_{\substack{\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{M}_k,\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}_k\\ \text{u.d.N (3.1)}}} F_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) \leq F_k(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \leq \frac{T}{2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}^2 .$$

□

Für die optimalen Zustände erhält man folgendes Resultat:

Korollar 4.5
Es existiert eine Konstante C unabhängig von k, sodass für die optimalen Zustände $\boldsymbol{M}^*$ von Problem 4.1 und $k > 0$ genügend klein gilt:

$$\max_{0\leq j\leq J-1}\left\|\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}, k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}^2, k\sum_{j=0}^{J-1}\left\|d_t\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 \leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Beweis:
Folgt mit Lemma 4.4 direkt aus Lemma 3.4. □

4.3 Semidiskretes Optimalitätssystem

Analog zu Abschnitt 2.2 wird das semidiskrete Optimierungsproblem 4.1 umformuliert, um den Lagrange-Multiplikatoren-Satz, Lemma 0.9, anwenden zu können.

Definiere und wiederhole dafür folgende Räume:

$$\boldsymbol{Z}_{k,1} := \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)^J,\quad \boldsymbol{Z}_{k,2} := \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1),\quad \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1},\quad \boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)^J$$

sowie zwei Abbildungen $\boldsymbol{e}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1}$ und $\boldsymbol{a}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,2}$ mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) &:= \left(d_t\boldsymbol{m}^j - \alpha\Delta\boldsymbol{m}^j - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}|^2\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{m}^j\times\Delta\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{m}^j\times\boldsymbol{u}^j\right)_{j=1}^J,\\ \boldsymbol{a}_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) &:= \boldsymbol{m}^0 - \boldsymbol{m}_0.\end{aligned}$$

Problem 4.1 lässt sich damit zu folgendem äquivalenten Problem umformulieren:

Problem 4.6
Seien $\widetilde{\boldsymbol{m}} : [0,T]\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ mit $|\boldsymbol{m}_0|^2 = 1$ in $\mathbb{S}^1$ und $\lambda > 0$ gegeben.
Minimiere für festes $k > 0$ das Funktional F_k u.d.N.

$$\boldsymbol{H}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1}\times\boldsymbol{Z}_{k,2},\ \boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}) := \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})\\ \boldsymbol{a}_k(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

4.3.1 Voraussetzungen des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes

Prüfe die Voraussetzungen des Lagrange-Multiplikatoren-Satzes:

- $F_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \mathbb{R}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar, siehe Lemma 4.2,
- $\boldsymbol{H}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1} \times \boldsymbol{Z}_{k,2}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar, siehe Lemmata 4.7 und 4.8,
- Lösungen von Problem 4.6 sind reguläre Punkte von $\boldsymbol{H}_k$, siehe Lemma 4.9.

Die nachfolgenden zwei Lemmata beweisen die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit der Nebenbedingung $\boldsymbol{H}_k$ komponentenweise.

Lemma 4.7
Die Abbildung $\boldsymbol{e}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle \\ &\qquad = \Big(d_t\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha\Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha|\nabla \boldsymbol{m}^{j-1}|^2\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{m}^j \times \Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{\delta m}^j \times \Delta \boldsymbol{m}^j \\ &\qquad\quad -\boldsymbol{\delta m}^j \times \boldsymbol{u}^j - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^{j-1},\nabla\boldsymbol{\delta m}^{j-1}\rangle\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{m}^j\times\boldsymbol{\delta u}^j\Big)_{j=1}^J.\end{aligned}$$

Beweis:
Schritt 1: $\boldsymbol{e}_k$ ist Gâteaux-differenzierbar:
Berechne die Richtungsableitungen in Richtung $\boldsymbol{\delta M}^j$ für $j = 0,\dots,J$, wobei alle Richtungen bis auf die j. verschwinden. Leite dafür nur die j. und $j+1$. Komponente nach $\boldsymbol{\delta m}^j$ ab (falls diese existieren), die restlichen Ableitungen sind $\mathbf{0}$. Erhalte

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})_j,\boldsymbol{\delta m}^j\rangle &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}+\epsilon\boldsymbol{\delta M}^j,\boldsymbol{U})_j \\ &= \frac{1}{k}\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha\Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}|^2\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{m}^j\times\Delta\boldsymbol{\delta m}^j \\ &\quad - \boldsymbol{\delta m}^j\times\Delta\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{\delta m}^j\times\boldsymbol{u}^j\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})_{j+1},\boldsymbol{\delta m}^j\rangle &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}+\epsilon\boldsymbol{\delta M}^j,\boldsymbol{U})_{j+1} \\ &= -\frac{1}{k}\boldsymbol{\delta m}^j - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^j,\nabla\boldsymbol{\delta m}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}.\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\delta M}^j\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{k}\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha\Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha|\nabla \boldsymbol{m}^{j-1}|^2\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{m}^j \times \Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{\delta m}^j \times \Delta\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{\delta m}^j \times \boldsymbol{u}^j \\ -\frac{1}{k}\boldsymbol{\delta m}^j - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^j, \nabla\boldsymbol{\delta m}^j\rangle\boldsymbol{m}^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei für $\boldsymbol{\delta M}^0$ bzw. $\boldsymbol{\delta M}^J$ nur die 1. bzw. J. Komponente abgeleitet wird.

Berechne die Richtungsableitungen $\boldsymbol{\delta U}^j$ für $j = 1, \ldots, J$, wobei alle Richtungen bis auf die j. verschwinden. Diese sind alle bis auf die j. Komponente $\boldsymbol{0}$ und für diese gilt

$$\langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})_j, \boldsymbol{\delta u}^j\rangle = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U} + \epsilon\boldsymbol{\delta U}^j)_j = -\boldsymbol{m}^j \times \boldsymbol{\delta u}^j$$

und damit

$$\langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{\delta U}^j\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\boldsymbol{m}^j \times \boldsymbol{\delta u}^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erhalte somit als möglichen Kanditaten

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}), (\boldsymbol{\delta M}, \boldsymbol{\delta U})\rangle \\
&\quad = \sum_{j=0}^{J} \langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{\delta M}^j\rangle + \sum_{j=1}^{J} \langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{\delta U}^j\rangle \\
&\quad = \Big(d_t\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha\Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}|^2\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{m}^j \times \Delta\boldsymbol{\delta m}^j - \boldsymbol{\delta m}^j \times \Delta\boldsymbol{m}^j \\
&\qquad - \boldsymbol{\delta m}^j \times \boldsymbol{u}^j - 2\alpha\langle\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}, \nabla\boldsymbol{\delta m}^{j-1}\rangle\boldsymbol{m}^j - \boldsymbol{m}^j \times \boldsymbol{\delta u}^j\Big)_{j=1}^{J}.
\end{aligned}$$

Da dieser Kanditat offenbar linear in der Richtung ist und sich für $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})$ fest beschränken lässt, siehe unten, ist er die Gâteaux-Ableitung.

Es lässt sich komponentenweise für $j = 1, \ldots, J$ mit $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)$ beschränken:

$$\begin{aligned}
&\|\langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{\delta M}\rangle_j\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad \le \left\|d_t\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha\left\|\Delta\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \alpha\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 \left\|\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad + \left\|\boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\Delta\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} + \left\|\Delta\boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\qquad + \left\|\boldsymbol{u}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\delta m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + 2\alpha\left\|\nabla\boldsymbol{m}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\nabla\boldsymbol{\delta m}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \\
&\quad \le C(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})\,\|\boldsymbol{\delta M}\|_{\boldsymbol{M}_k},
\end{aligned}$$

bzw.

$$\|\langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\delta U}\rangle_j\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le \left\|\boldsymbol{m}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{\delta u}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \le C(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})\,\|\boldsymbol{\delta U}\|_{\boldsymbol{U}_k}.$$

Schritt 2: $\boldsymbol{e}_k$ ist stetig Fréchet-differenzierbar:
Nach [Růž04, Satz 2.5] folgt aus stetig Gâteaux-differenzierbar bereits stetig Fréchet-differenzierbar und die Stetigkeit von $\langle \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle$ bzgl. $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})$ ergibt sich aus der Stetigkeit der einzelnen Operationen. □

Lemma 4.8
Die Abbildung $\boldsymbol{a}_k : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,2}$ ist stetig Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\langle \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle = \boldsymbol{\delta m}^0.$$

Beweis:
Schritt 1: $\boldsymbol{a}_k$ ist Gâteaux-differenzierbar:
Berechne die Richtungsableitungen in Richtung $\boldsymbol{\delta M}$:

$$\langle \boldsymbol{a}_{k,M}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\delta M}\rangle = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \boldsymbol{a}_{k,M}(\boldsymbol{M}+\epsilon\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\delta m}^0.$$

Die Richtungsableitung in Richtung $\boldsymbol{\delta U}$ ist $\mathbf{0}$, habe damit als möglichen Kanditaten

$$\langle \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle = \langle \boldsymbol{a}_{k,M}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\delta M}\rangle + \langle \boldsymbol{a}_{k,U}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\delta U}\rangle = \boldsymbol{\delta m}^0.$$

Da dieser Kanditat offenbar linear in der Richtung ist und sich für $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})$ fest beschränken lässt, siehe unten, ist er die Gâteaux-Ableitung.

$$\begin{aligned}\|\langle \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} &= \left\|\boldsymbol{\delta m}^0\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\le \|\boldsymbol{\delta M}\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1}} \le \|(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\|_{\boldsymbol{M}_k\times\boldsymbol{U}_k}.\end{aligned}$$

Schritt 2: $\boldsymbol{a}_k$ ist stetig Fréchet-differenzierbar:
Nach [Růž04, Satz 2.5] folgt aus stetig Gâteaux-differenzierbar bereits stetig Fréchet-differenzierbar und die Stetigkeit von $\langle \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U}),(\boldsymbol{\delta M},\boldsymbol{\delta U})\rangle$ bzgl. $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{U})$ ergibt sich klarerweise. □

Zeige noch, dass Minima an regulären Punkten angenommen werden.

Lemma 4.9
Sei $(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*)$ eine Lösung von Problem 4.1.
Dann ist für $k>0$ genügend klein $(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*)$ ein regulärer Punkt der Funktion $\boldsymbol{H}_k$.

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass

$$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \mapsto \langle \boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*),(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})\rangle : \boldsymbol{M}_k\times\boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1}\times\boldsymbol{Z}_{k,2} \quad \left(= \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)^J \times \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)\right)$$

surjektiv ist. Insbesondere gilt dabei $(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{U}^*) \in \boldsymbol{M}_k\times\boldsymbol{U}_k$, also

$$\boldsymbol{M}^* \in \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1} \text{ und } \boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)^J.$$

Sei nun $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{f}_2) \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)^J \times \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)$ gegeben. Finde ein $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) \in \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k$ mit

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})\rangle &= \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})\rangle \\ \langle \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{V}\rangle + \langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{W}\rangle \\ \boldsymbol{v}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Setze $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$ und zeige, dass ein $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{M}_k$ existiert mit

$$\langle \boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{0})\rangle = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{V}\rangle \\ \boldsymbol{v}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt also zu zeigen: Es existiert ein $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{M}_k$, welches folgende lineare Differentialgleichung, die bereits in Lemma 4.7 hergeleitet wurde, erfüllt:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{V}\rangle = \Big(& d_t \boldsymbol{v}^j - \alpha \Delta \boldsymbol{v}^j - \alpha |\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2 \boldsymbol{v}^j - 2\alpha \langle \nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}, \nabla \boldsymbol{v}^{j-1}\rangle \boldsymbol{m}_*^j \\ & - \boldsymbol{v}^j \times \Delta \boldsymbol{m}_*^j - \boldsymbol{m}_*^j \times \Delta \boldsymbol{v}^j - \boldsymbol{v}^j \times \boldsymbol{u}_*^j \Big)_{j=1}^J = \boldsymbol{F}_1\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{f}_2$ und damit wäre $\boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) : \boldsymbol{M}_k \times \boldsymbol{U}_k \to \boldsymbol{Z}_{k,1} \times \boldsymbol{Z}_{k,2}$ surjektiv.

Zeige die Existenz für k genügend klein von $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)^{J+1}$ analog zu Schritt 2 im Beweis von Lemma 2.7, da dort dieselbe Semidiskretisierung verwendet wurde, um approximativ die Existenz für das kontinuierlichen Analogon beweisen zu können. Die unabhängige Beschränktheit der $\boldsymbol{M}^*$ folgt dabei für Minima aus Korollar 4.5.
Die Regularität $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)^{J+1}$ folgt wiederum mit Korollar 4.5 und da k fest ist aus der 2. Abschätzung in Schritt 4 desselben Beweises. □

Bemerkung: (Existenz der Lagrange-Multiplikatoren)
Damit ist für festes $0 < k \leq k_0 \left(\mathbb{S}^1, T, \alpha, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}\right)$ die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren für Problem 4.1 bewiesen.

4.3.2 Aufstellen des semidiskreten Optimalitätssystems

Nach dem Lagrange-Multiplikatoren-Satz, Lemma 0.9, existiert für k genügend klein ein $\boldsymbol{Z}_k = (\boldsymbol{Z}_{k1}, \boldsymbol{z}_{k2}) \in \boldsymbol{Z}_{k,1}^* \times \boldsymbol{Z}_{k,2}^*$, sodass die Lagrange-Funktion

$$L_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) := F_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}) + \boldsymbol{Z}_k \boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})$$

stationär am Optimum $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ wird, d.h. mit $\boldsymbol{Z}_{k1} = \left(\boldsymbol{z}_{k1}^j\right)_{j=0}^{J-1}$ gilt

$$\begin{aligned}L_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) &= F_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) + \boldsymbol{Z}_k \boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) \\ &= F_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) + \sum_{i=0}^{J-1} \boldsymbol{z}_{k1}^i \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)_{i+1} + \boldsymbol{z}_2 \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) \\ &= F_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) + k \sum_{i=0}^{J-1} \widetilde{\boldsymbol{z}}_{k1}^i \boldsymbol{e}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)_{i+1} + \boldsymbol{z}_2 \boldsymbol{a}_k'(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*) = \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

wobei $k\widetilde{\boldsymbol{z}}_{k1}^i = \boldsymbol{z}_{k1}^i$. Der Einfachheit halber wird weiterhin $\boldsymbol{z}_{k1}^i$ statt $\widetilde{\boldsymbol{z}}_{k1}^i$ notiert.

Insbesondere gilt für die Richtungsableitungen, bei denen alle Einträge bis auf die j. Komponente verschwinden,

$$\langle L_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta M}^j\rangle = 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, J, \tag{4.1}$$

$$\langle L_{k,U}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta U}^j\rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, J. \tag{4.2}$$

Ausgerechnet lauten für $j = 1, \dots, J$ die Gleichungen (4.1) und (4.2) unter Verwendung der Lemmata 4.2, 4.7 und 4.8 :

$$\begin{aligned}
&\langle L_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta M}^j\rangle \\
&\quad = \langle F_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta M}^j\rangle + k\sum_{i=0}^{J-1}\langle \boldsymbol{z}_{k1}^i, \langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)_{i+1}, \boldsymbol{\delta M}^j\rangle\rangle \\
&\quad = k\left(\boldsymbol{m}_*^j - \widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j), \boldsymbol{\delta m}^j\right) - k\left(d_t\boldsymbol{z}_{k1}^j, \boldsymbol{\delta m}^j\right) - \alpha k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \Delta\boldsymbol{\delta m}^j\right) \\
&\qquad - \alpha k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, |\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2\boldsymbol{\delta m}^j\right) - k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{m}_*^j \times \Delta\boldsymbol{\delta m}^j\right) - k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{\delta m}^j \times \Delta\boldsymbol{m}_*^j\right) \\
&\qquad - k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{\delta m}^j \times \boldsymbol{u}_*^j\right) - 2\alpha k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^j, \langle\nabla \boldsymbol{m}_*^j, \nabla\boldsymbol{\delta m}^j\rangle \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right) \\
&\quad = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\delta m}^j \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1),
\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{z}_{k1}^J = \boldsymbol{0}$ gesetzt wird, sowie

$$\begin{aligned}
\langle L_{k,U}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta U}^j\rangle &= \langle F_{k,U}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta U}^j\rangle + \sum_{i=0}^{J-1}\langle \boldsymbol{z}_{k1}^i, \langle \boldsymbol{e}_{k,U}(\boldsymbol{U}^*, \boldsymbol{M}^*)_{i+1}, \boldsymbol{\delta U}^j\rangle\rangle \\
&= \lambda k\left(\boldsymbol{u}_*^j, \boldsymbol{\delta u}^j\right) + \lambda k\left(\nabla \boldsymbol{u}_*^j, \nabla\boldsymbol{\delta u}^j\right) - k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{m}_*^j \times \boldsymbol{\delta u}^j\right) \\
&= 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\delta u}^j \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1).
\end{aligned}$$

Bemerkung: (Zusammenhang $\boldsymbol{Z_{k1}}$ und $\boldsymbol{z_{k2}}$)
Ableiten der Lagrange-Funktion in Richtung $\boldsymbol{\delta M}^0$, wobei alle Komponenten bis auf die 0. verschwinden, ergibt

$$\begin{aligned}
&\langle L_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*), \boldsymbol{\delta M}^0\rangle \\
&\qquad = k\sum_{i=0}^{J-1}\langle \boldsymbol{z}_{k1}^i, \langle \boldsymbol{e}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)_{i+1}, \boldsymbol{\delta M}^0\rangle\rangle + \langle \boldsymbol{z}_{k2}, \langle \boldsymbol{a}_{k,M}(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U})^*, \boldsymbol{\delta M}^0\rangle\rangle \\
&\qquad = k\left(\boldsymbol{z}_{k1}^0, -\frac{1}{k}\boldsymbol{\delta m}^0 - 2\alpha\langle \nabla \boldsymbol{m}_*^0, \nabla \boldsymbol{\delta m}^0\rangle \boldsymbol{m}_*^1\right) + \left(\boldsymbol{z}_{k2}, \boldsymbol{\delta m}^0\right) \\
&\qquad = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\delta m}^0 \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)
\end{aligned}$$

und somit lässt sich der Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{z}_{k2}$ bestimmen, sobald die anderen Größen berechnet wurden. Da dieser Lagrange-Multiplikator im Folgenden jedoch keine Rolle spielt, wird er nicht mehr erwähnt.

Damit ergibt sich für eine Lösung $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ des Problems 4.1 für k genügend klein folgendes Optimalitätssystem:

$$\boldsymbol{0} = d_t\boldsymbol{m}_*^j - \alpha\Delta\boldsymbol{m}_*^j - \alpha|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2\boldsymbol{m}_*^j - \boldsymbol{m}_*^j \times \Delta\boldsymbol{m}_*^j - \boldsymbol{m}_*^j \times \boldsymbol{u}_*^j, \tag{4.3a}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \lambda \boldsymbol{u}_*^j - \lambda \Delta \boldsymbol{u}_*^j - \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^j, \qquad (4.3b)\\
0 &= \left(\boldsymbol{m}_*^j - \widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j), \boldsymbol{\delta m}^j\right) - \left(d_t \boldsymbol{z}_{k1}^j, \boldsymbol{\delta m}^j\right) - \alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \Delta \boldsymbol{\delta m}_*^j\right)\\
&\quad - \alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, |\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2 \boldsymbol{\delta m}^j\right) - \left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{m}_*^j \times \Delta \boldsymbol{\delta m}^j\right) - \left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{\delta m}^j \times \Delta \boldsymbol{m}_*^j\right) \qquad (4.3c)\\
&\quad - \left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{\delta m}^j \times \boldsymbol{u}_*^j\right) - 2\alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j}, \langle \nabla \boldsymbol{m}_*^j, \nabla \boldsymbol{\delta m}^j\rangle \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right) \text{ für alle } \boldsymbol{\delta m}^j \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)
\end{aligned}
$$

für $j = 1, \dots, J$ und mit den Anfangs- bzw. Enditerierten $\boldsymbol{m}_*^0 = \boldsymbol{m}_0$ und $\boldsymbol{z}_{k1}^J = \mathbf{0}$.

Dabei entspricht die Zustandsgleichung (4.3a) mit Anfangsiterierten natürlich der semidiskreten LLG, (3.1), die Optimalitätsbedingung (4.3b) ergibt sich aus der starken Formulierung von (4.2) und schließlich erhält man aus (4.1) die Adjungiertengleichung (4.3c) mit Enditerierten.

4.4 Regularität der Adjungierten $\boldsymbol{z}_{k1}^j$

Aus dem Lagrange-Multiplikatoren-Satz erhält man die semidiskreten Adjungierten $\boldsymbol{z}_{k1}^j \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)$ für $j = 0, \dots, J-1$, jedoch ergeben sich aus der Adjungiertengleichung (4.3c) und $\boldsymbol{z}_{k1}^J = \mathbf{0}$ höhere Regularitäten.

Lemma 4.10
Sei $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ eine Lösung von Problem 4.1.
Dann besitzt die Lösung $\{\boldsymbol{z}_{k1}^j\}_{j=0}^J$ der semidiskreten Adjungiertengleichung (4.3c) mit $\boldsymbol{z}_{k1}^J = \mathbf{0}$ für $k > 0$ klein genug folgende Regularität:

$$
\max_{0\le j\le J} \left\|\boldsymbol{z}_{k1}^j\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 + k\sum_{j=1}^J \left\|d_t \boldsymbol{z}_{k1}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + k\sum_{j=0}^J \left\|\boldsymbol{z}_{k1}^j\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \le C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right),
$$

unabhängig von der Zeitschrittweite k.

Beweis:
Da $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ eine Lösung von Problem 4.1 ist, erhält man für $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ insbesondere die Schranken aus Lemma 4.4 und Korollar 4.5.

Schritt 1: Teste (4.3c) formal mit $\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}$:
Erhalte mit

$$
\left(-d_t \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right) = \frac{1}{2k}\left(\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 - \left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} - \boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\right)
$$

und den Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2k}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 - \frac{1}{2k}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \alpha\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\\
&\qquad \le \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j) - \boldsymbol{m}_*^j, \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right) + \alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, |\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2 \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right) + \left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}, \nabla \boldsymbol{m}_*^j \times \nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right)\\
&\qquad\quad + 2\alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j}, \langle \nabla \boldsymbol{m}_*^j, \nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\rangle \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)\\
&\qquad =: I_1 + \alpha I_2 + I_3 + 2\alpha I_4.
\end{aligned}
$$

Schätze die Terme einzeln ab:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
I_2 &\leq \left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
I_3 &\leq C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
I_4 &\leq C(\sigma)\left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,
\end{aligned}$$

für $\sigma>0$. Absorbiere für σ klein genug, multipliziere mit k und summiere von $l+1$ bis J. Erhalte für

$$\begin{aligned}
A_{j-1} &:= \frac{1}{2}+\left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2+C\left\|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2,\\
B &:= k\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,
\end{aligned}$$

wobei bei dem Term aus I_4 der Summationsindex verschoben werden musste, mit $\boldsymbol{z}_{k1}^J=\boldsymbol{0}$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{l}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\frac{\alpha}{2}k\sum_{j=l+1}^{J}\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\leq k\sum_{j=l+1}^{J}A_{j-1}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+B.$$

Nach Lemma 4.4 und Korollar 4.5 kann kA_l unabhängig von j beliebig klein werden und somit ergibt das diskrete Gronwall-Lemma

$$\max_{1\leq j\leq J}\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+k\sum_{j=1}^{J}\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}},\left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)},T\right).$$

Schritt 2: Teste (4.3c) formal mit $-\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}$:
Erhalte mit partieller Integration und den Rechenregeln des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k}\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2-\frac{1}{2k}\left\|\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\alpha\left\|\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2&\\
\leq -\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^j,\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right)-\alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},|\nabla\boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2(-\Delta)\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right)&\\
-\left[2\left(\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\nabla\boldsymbol{m}_*^j\times\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right)+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\Delta\boldsymbol{m}_*^j\times\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right)\right]&\\
-\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\times\Delta\boldsymbol{m}_*^j\right)-\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\times\boldsymbol{u}_*^j\right)&\\
+2\alpha\left[\left(\nabla\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\nabla\boldsymbol{m}_*^j,\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\rangle\boldsymbol{m}^{j+1}\right)+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\Delta\boldsymbol{m}_*^j,\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\rangle\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)\right.&\\
\left.+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\nabla\boldsymbol{m}_*^j,\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\rangle\nabla\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)\right]&\\
=: I_1+\alpha I_2+I_3+\ldots+I_6+2\alpha(I_7+\ldots+I_9).&
\end{aligned}$$

Einzeln abgeschätzt:

$$I_1\leq C(\sigma)\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,$$

$$
\begin{aligned}
&\quad I_2 \le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^4+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
&\quad I_3 \le C(\sigma)\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
&I_4+I_5=0,\\
&\quad I_6 \le C(\sigma)\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{u}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
&\quad I_7 \le C(\sigma)\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
&\quad I_8 \le C(\sigma)\left\|\Delta \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\\
&\quad I_9 \le C(\sigma)\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\sigma\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,
\end{aligned}
$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug, multipliziere mit k, summiere von $l+1$ bis J und erhalte für

$$
\begin{aligned}
A_{j-1} &:= C\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2+C\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2+C\left\|\Delta \boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2,\\
B &:= k\sum_{j=1}^{J}\Big[C\left\|\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+C\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^4\\
&\qquad+C\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{u}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2+C\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2\left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\Big],
\end{aligned}
$$

wobei bei Termen aus I_7 und I_8 analog zu Schritt 1 der Summationsindex verschoben wurde, mit $\boldsymbol{z}_{k1}^{J}=\mathbf{0}$ die Abschätzung

$$
\frac{1}{2}\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{l}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\frac{\alpha k}{2}\sum_{j=l+1}^{J}\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \le k\sum_{j=l+1}^{J}A_{j-1}\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+B.
$$

Mit Lemma 4.4 und Korollar 4.5 und Schritt 1 erhält man:

$$
\max_{0\le j\le J}\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\frac{\alpha k}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\|\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \le C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}},\left\|\boldsymbol{m}_0\right\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)},T\right).
$$

Schritt 3: Teste dazu (4.3c) formal mit $-d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}$:
Erhalte mit partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
&\left\|d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2-\frac{\alpha}{2k}\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2+\frac{\alpha}{2k}\left\|\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2\\
&\quad\le-\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}(t_j)-\boldsymbol{m}_*^{j},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right)-\alpha\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},|\nabla \boldsymbol{m}_*^{j-1}|^2 d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right)\\
&\qquad-\Big[\left(\Delta \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\boldsymbol{m}_*^{j}\times d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right)+2\left(\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},\nabla \boldsymbol{m}_*^{j}\times d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right)+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\Delta \boldsymbol{m}_*^{j}\times d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\right)\Big]\\
&\qquad-\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\times \Delta \boldsymbol{m}_*^{j}\right)-\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\times \boldsymbol{u}_*^{j}\right)\\
&\qquad+2\alpha\Big[\left(\nabla \boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\nabla \boldsymbol{m}_*^{j},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\rangle\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\Delta \boldsymbol{m}_*^{j},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\rangle\boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j},\langle\nabla \boldsymbol{m}_*^{j},d_t\boldsymbol{z}_{k1}^{j}\rangle\nabla \boldsymbol{m}_*^{j+1}\right)\Big]\\
&\quad=: I_1+\alpha I_2+I_3+\ldots+I_6+2\alpha(I_8+\ldots+I_{10}).
\end{aligned}
$$

Schätze alle Terme analog zu Schritt 3 ab nur mit $d_t\boldsymbol{z}_{k1}^j$ statt $\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}$, verarbeite I_3 wie folgt:

$$I_3 \leq C(\sigma) \left\|\Delta\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \left\|\boldsymbol{m}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 + \sigma \left\|d_t\boldsymbol{z}_{k1}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und erhalte mit Lemma 4.4, Korollar 4.5 und den Resultaten aus Schritt 1 und 2

$$k\sum_{j=1}^J \left\|d_t\boldsymbol{z}_{k1}^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

□

Bemerkung: (Notwendigkeit höherer Stabilität für $\boldsymbol{M}^*$)
Im vorangegangen Beweis wird bei Schritt 2 beispielsweise im Term I_8 klar, dass man höhere Stabilität für $\boldsymbol{Z}_{k1}$ nur durch bessere Stabilität des optimalen Zusandes $\boldsymbol{M}^*$ erhält. In Kapitel 5 wird diese wiederum benötigt um den Grenzwertübergang durchführen zu können, vgl. Lemma 5.4.

4.5 Bessere Regularität der optimalen Kontrolle $\boldsymbol{u}_*^j$

Analog zu Abschnitt 4.4 erhält man aus der Optimalitätsbedingung (4.3b) höhere Regularitäten für optimale Kontrollen $\boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{U}_k$.

Proposition 4.11
Sei $(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{U}^*)$ eine Lösung von Problem 4.1.
Dann besitzt für $k > 0$ genügend klein die optimale Kontrolle $\boldsymbol{U}^*$ folgende Regularität:

$$\max_{1\leq j\leq J} \left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{H}^2(\mathbb{S}^1)}^2, k\sum_{j=1}^J \left\|d_t\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{S}^1)}^2 \leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right),$$

wobei $\boldsymbol{u}_*^0 := \boldsymbol{u}_*^1$ und C unabhängig von der Zeitschrittweite k ist.

Beweis:
Schritt 1: Multipliziere (4.3b) mit $\boldsymbol{u}_*^j$, integriere im Ort und erhalte

$$\begin{aligned}\lambda \left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \lambda \left\|\nabla\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 &= \left(\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^j, \boldsymbol{u}_*^j\right) \\ &\leq C(\sigma) \left\|\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)} \left\|\boldsymbol{m}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sigma \left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2,\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und erhalte mit Lemma 4.10 und Korollar 4.5

$$\max_{1\leq j\leq J} \left\|\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \max_{1\leq j\leq J} \left\|\nabla\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Analog ergibt sich bei Multiplikation von (4.3b) mit $-\Delta\boldsymbol{u}_*^j$:

$$\max_{1\leq j\leq J} \left\|\nabla\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \max_{1\leq j\leq J} \left\|\Delta\boldsymbol{u}_*^j\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \leq C\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}, \|\boldsymbol{m}_0\|_{\boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)}, T\right).$$

Schritt 2: Bilde die diskrete Zeitableitung von (4.3b):
Erhalte für $j = 2, \dots, J$:

$$\begin{aligned}\lambda d_t \boldsymbol{u}_*^j - \lambda d_t \Delta \boldsymbol{u}_*^j &= \frac{1}{k}\boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^j \pm \frac{1}{k}\boldsymbol{z}_{k1}^{j-2} \times \boldsymbol{m}_*^j - \frac{1}{k}\boldsymbol{z}_{k1}^{j-2} \times \boldsymbol{m}_*^{j-1} \\ &= d_t \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \times \boldsymbol{m}_*^j + \boldsymbol{z}_{k1}^{j-2} \times d_t \boldsymbol{m}_*^j.\end{aligned}$$

Multipliziere mit $d_t \boldsymbol{u}_*^j$, integriere im Ort, multipliziere mit k und summiere:

$$\begin{aligned}\lambda k \sum_{j=2}^{J} \left\| d_t \boldsymbol{u}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 &+ \lambda k \sum_{j=2}^{J} \left\| \nabla d_t \boldsymbol{u}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq J} \left\| \boldsymbol{m}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 C(\sigma) k \sum_{j=2}^{J} \left\| d_t \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 \\ &\quad + \max_{0 \leq j \leq J} \left\| \boldsymbol{z}_{k1}^{j-1} \right\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{S}^1)}^2 C(\sigma) k \sum_{j=2}^{J} \left\| d_t \boldsymbol{m}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 + \sigma k \sum_{j=2}^{J} \left\| d_t \boldsymbol{u}_*^j \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{S}^1)}^2 ,\end{aligned}$$

für $\sigma > 0$. Absorbiere für σ klein genug und mit Lemma 4.10 und Korollar 4.5 folgt die Behauptung. $\square$

5 Konvergenz des Optimalitätssystems

In diesem Kapitel wird mit Hilfe der bisher erarbeiteten Resultate das Hauptresultat, Theorem 5.5, bewiesen, das zeigt, dass bis auf eine Teilfolge die Lösungen des semidiskreten Optimalitätssystems (4.3) in einem gewissen Sinn konvergieren und ihre Grenzwerte das kontinuierliche Optimalitätssystem (2.13) erfüllen. Um dies zu erreichen werden statt der Iterierten nur ihre stückweise konstanten bzw. affinen Fortsetzungen betrachtet.

Lemma 5.1
Seien $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})$ Lösungen des Problems 4.1.
Dann existiert ein $\boldsymbol{u}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$, $\boldsymbol{m}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^3) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$ und $\boldsymbol{z}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2)$, sodass folgende Funktionen für bestimmte Teilfolgen in dem nachfolgenden Sinn für $k \to 0$ konvergieren:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}} &\to \boldsymbol{u}^* && \text{stark in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}} &\rightharpoonup \boldsymbol{u}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^2),\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{U}} &\rightharpoonup \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}} &\rightharpoonup^* \boldsymbol{u}^* && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet, \boldsymbol{\mathcal{M}} &\to \boldsymbol{m}^* && \text{stark in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet, \boldsymbol{\mathcal{M}} &\rightharpoonup \boldsymbol{m}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^3),\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{M}} &\rightharpoonup \frac{d}{dt}\boldsymbol{m}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^1),\\
\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}} &\rightharpoonup^* \boldsymbol{m}^* && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\to \boldsymbol{z}^* && \text{stark in } L^2(\boldsymbol{L}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\rightharpoonup \boldsymbol{z}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{H}^2),\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{Z}} &\rightharpoonup \frac{d}{dt}\boldsymbol{z}^* && \text{schwach in } L^2(\boldsymbol{L}^2),\\
\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\rightharpoonup^* \boldsymbol{z}^* && \text{schwach-stern in } L^\infty(\boldsymbol{H}^1),
\end{aligned}
$$

wobei bei der Konstruktion von $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ die 0. Iterierte gesetzt wird als $\boldsymbol{u}^0 := \boldsymbol{u}^1$.

Beweis:
Die schwachen und schwach-stern Konvergenzen erhält man mit den Lemmata 0.3 und 0.4 aus der Beschränktheit der Funktionen, die in Proposition 4.11, Korollar 4.5 und Lemma 4.10 für $k > 0$ klein genug unabhängig von der Zeitschrittweite k bewiesen wurden, und Lemma 0.15 sichert die Konvergenz gegen denselben Grenzwert.

Die starken Konvergenzen erhält man mit Aubin-Lions, Lemma 0.7, auf $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ bzw. $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ angewandt, wieder für $k > 0$ klein genug mit den Schranken, die in Proposition 4.11, Korollar 4.5 und Lemma 4.10 unabhängig von der Zeitschrittweite k bewiesen wurden, und Lemma 0.15 sichert die starke Konvergenz gegen denselben Grenzwert der entsprechenden konstanten Funktionen. □

Es bleibt zu zeigen, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*)$ die kontinuierlichen Optimalitätsbedingungen (2.13) erfüllt. Mit der entsprechenden Regularität der auftretenden Funktionen reicht es nach dem Fundamentallemma der Variationsrechung, [Alt06, Satz 2.21], zu zeigen, dass die Optimalitätsbedingungen für Testfunktionen aus $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ erfüllt sind.

Zeige zuerst, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*)$ die Zustandsgleichung (2.13a) löst.

Lemma 5.2
Seien $\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*$ wie in Lemma 5.1 definiert und $\{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U})\}_{k>0}$ die konvergente Teilfolge. Dann gilt für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ und $k \to 0$:

1. $\int_0^T (d_t\boldsymbol{\mathcal{M}} - \boldsymbol{m}_t^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
2. $\int_0^T (\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
3. $\int_0^T (|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
4. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
5. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$.

Beweis:
1. und 2. sind auf Grund der schwachen Konvergenz klar.

Zu 3.:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\nabla\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}\Big)\\
&\qquad\qquad = \int_0^T \Big(|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\varphi}\Big) + \int_0^T (\langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\rangle\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad\qquad\quad + \int_0^T (\langle\nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\rangle\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad\qquad \le \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\qquad\qquad + \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\qquad\qquad\quad + \|\nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\qquad\qquad \to 0 \qquad \text{(für } k \to 0\text{)}.
\end{aligned}
$$

Zu 4.: Da $\boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}\Big)\\
&\quad = \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*) \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\varphi}\Big) + \int_0^T \Big(\boldsymbol{m}^* \times (\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta\boldsymbol{m}^*), \boldsymbol{\varphi}\Big)\\
&\quad \le \Big\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \Big\|\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\Big\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} - \int_0^T \Big(\Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}\Big)\\
&\quad \to 0 \qquad \text{(für } k \to 0\text{)}.
\end{aligned}
$$

Zu 5.: Da $\boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&\qquad = \int_0^T \Big((\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\varphi}\Big) + \int_0^T \Big(\boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&\qquad \leq \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} - \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{U}}^+ - \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}\Big) \\
&\qquad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: (Anfangswert $\boldsymbol{m}^*(0)$)
Es gilt mit partieller Integration für $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{0}$ und $k \to 0$:

$$\int_0^T (\boldsymbol{m}_t^*, \boldsymbol{\varphi}) \leftarrow \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{M}}_t, \boldsymbol{\varphi}) = -\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}(0)) \to -\int_0^T (\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{\varphi}_t) - (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\varphi}(0))$$

und somit ist $\boldsymbol{m}^*(0) = \boldsymbol{m}_0$.

Zeige nun, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*)$ die Optimalitätsbedingung (2.13b) erfüllt:

Lemma 5.3
Seien $\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*$ wie in Lemma 5.1 definiert und $\{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{Z})\}_{k>0}$ die konvergente Teilfolge.
Dann gilt für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ und $k \to 0$:

1. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
2. $\int_0^T (\nabla\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \nabla\boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}^*, \nabla\boldsymbol{\varphi}) \to 0$,
3. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}) \to 0$.

Beweis:
1. und 2. sind auf Grund der schwachen Konvergenz klar.

Zu 3.: Da $\boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \boldsymbol{\varphi}\Big) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad = \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*) \times \boldsymbol{\varphi}\Big) + \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad \leq \|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} + \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad \to 0. \qquad (\text{für } k \to 0)
\end{aligned}$$

□

Zeige schließlich, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*)$ die Adjungiertengleichung (2.13c) erfüllt:

Lemma 5.4
Seien $\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*$ wie in Lemma 5.1 definiert und $\{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{Z})\}_{k>0}$ die konvergente Teilfolge.
Dann gilt für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$ und $k \to 0$:

1. $\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \widetilde{\boldsymbol{m}}^+, \boldsymbol{\varphi}\right) - \int_0^T (\boldsymbol{m}^* - \widetilde{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
2. $\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{Z}}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi}\right) \to 0,$
3. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \Delta\boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \Delta\boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
4. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, |\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
5. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\varphi}) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\varphi}) \to 0,$
6. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\varphi} \times \Delta\boldsymbol{\mathcal{M}}^+) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times \Delta\boldsymbol{m}^*) \to 0,$
7. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{u}^*) \to 0,$
8. $\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \nabla\boldsymbol{\varphi}\rangle\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \langle\nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{\varphi}\rangle\boldsymbol{m}^*) \to 0.$

Beweis:
1. gilt wegen der schwachen Konvergenz bei $\boldsymbol{\mathcal{M}}^+$ und $\widetilde{\boldsymbol{m}}^+$ konvergiert nach Lemma 0.16 stark, 2. und 3. sind auf Grund der schwachen Konvergenz auch klar.

Zu 4.: Da $|\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, |\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-|^2\boldsymbol{\varphi}\right) - \int_0^T \left(\boldsymbol{z}^*, |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\qquad = \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-, \nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\rangle\boldsymbol{\varphi}) + \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \langle\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*, \nabla\boldsymbol{m}^*\rangle\boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\qquad \le \|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^-\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\qquad\quad + \|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^- - \nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)}\\
&\qquad\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, |\nabla\boldsymbol{m}^*|^2\boldsymbol{\varphi}\right)\\
&\qquad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}$$

Zu 5.: Da $\boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times \Delta\boldsymbol{\varphi}\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad = \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, (\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*) \times \Delta\boldsymbol{\varphi}\right) + \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad \le \left\|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \boldsymbol{m}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\Delta\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} + \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{m}^* \times \Delta\boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}$$

Zu 6.: Da $\boldsymbol{z}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\varphi} \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times \Delta \boldsymbol{m}^*) \\
&\qquad = \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right) + \int_0^T \left(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times (\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta \boldsymbol{m}^*)\right) \\
&\qquad \leq \|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^- - \boldsymbol{z}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \left\|\Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} + \int_0^T \left(\boldsymbol{z}^* \times \boldsymbol{\varphi}, \Delta \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \Delta \boldsymbol{m}^*\right) \\
&\qquad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}
$$

Zu 7.: Da $\boldsymbol{z}^* \times \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-, \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{u}^*) \\
&\qquad\qquad = \int_0^T \left((\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{\mathcal{Z}}^-) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\varphi}\right) + \int_0^T \left(\boldsymbol{z}^* \times (\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{\mathcal{U}}^+), \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\qquad\qquad = \|\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{\mathcal{Z}}^-\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} - \int_0^T \left(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{z}^* \times \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\qquad\qquad \to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}
$$

Zu 8.: Mit Hilfe der Grassmann-Identität erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \nabla \boldsymbol{\varphi}\rangle \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \nabla \boldsymbol{\varphi}\rangle \boldsymbol{m}^*) \\
&\qquad\qquad = \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad\qquad\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times (\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet \times \nabla \boldsymbol{\varphi})\right) - \int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \nabla \boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{m}^* \times \nabla \boldsymbol{\varphi})) \\
&\qquad\qquad = I + II,
\end{aligned}
$$

wobei mit $\langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}$ bzw. $\nabla \boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{m}^* \times \nabla \boldsymbol{\varphi}) \in L^2(\boldsymbol{L}^2)$ gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+, \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet - \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \langle \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+ - \boldsymbol{z}^*, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\leq \left\|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet - \boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\quad + \left\|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\quad + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+ - \boldsymbol{z}^*, \langle \nabla \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}^*\rangle \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) \\
&\to 0 \qquad (\text{für } k \to 0), \\
II &= \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, \nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ \times ((\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet - \boldsymbol{m}^*) \times \nabla \boldsymbol{\varphi})\right) + \int_0^T \left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+, (\nabla \boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla \boldsymbol{m}^*) \times (\boldsymbol{m}^* \times \nabla \boldsymbol{\varphi})\right) \\
&\quad + \int_0^T \left((\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+ - \boldsymbol{z}^*), \nabla \boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{m}^* \times \nabla \boldsymbol{\varphi})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet - \boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^\infty)} \\
&\quad + \left\|\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+\right\|_{L^\infty(\boldsymbol{L}^2)} \left\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{M}}^+ - \nabla\boldsymbol{m}^*\right\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \|\boldsymbol{m}^*\|_{L^2(\boldsymbol{L}^\infty)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\boldsymbol{L}^2)} \\
&\quad + \int_0^T \Big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^+ - \boldsymbol{z}^*, \nabla\boldsymbol{m}^* \times (\boldsymbol{m}^* \times \nabla\boldsymbol{\varphi})\Big) \\
&\to 0 \qquad (\text{für } k \to 0).
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung: (Notwendigkeit höherer Stabilität der M bzw. Z)
Im vorangegangen Beweis sieht man bespielsweise bei 4. bereits im ersten Summanden, dass die starke $L^2(\boldsymbol{H}^1)$-Konvergenz der $\boldsymbol{\mathcal{M}}^-$ notwendig ist bzw. um dies zu umgehen würde man nach einer partiellen Integration $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-$ in $L^\infty(\boldsymbol{H}^1)$ benötigen. Da sich diese Regularität von $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^-$ nicht ohne die höhere Regularität von $\boldsymbol{M}$ herleiten lassen, vgl. Lemma 4.10, wurde $\boldsymbol{m}_0 \in \boldsymbol{H}^3(\mathbb{S}^1)$ gewählt, um somit mit Lemma 3.4 alle benötigten Schranken zu erhalten.

Bemerkung: (Endwert $\boldsymbol{z}^*(T)$)
Es gilt mit partieller Integration für $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty)$, $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{0}$ und $k \to 0$:

$$
\int_0^T (\boldsymbol{z}_t^*, \boldsymbol{\varphi}) \leftarrow \int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}_t, \boldsymbol{\varphi}) = -\int_0^T (\boldsymbol{\mathcal{Z}}, \boldsymbol{\varphi}_t) \to -\int_0^T (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\varphi}_t)
$$

und somit ist $\boldsymbol{z}^*(T) = \boldsymbol{0}$.

Zusammenfassend ergibt sich das Hauptresultat:

Theorem 5.5
Die Funktionen $\boldsymbol{u}^* \in L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$, $\boldsymbol{m}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^3) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^2) \cap H^1(\boldsymbol{H}^1)$ und $\boldsymbol{z}^* \in L^2(\boldsymbol{H}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{H}^1) \cap H^1(\boldsymbol{L}^2)$ - wie in Lemma 5.1 definiert - lösen das kontinuierliche Optimalitätssystem (2.13).
Weiter existiert eine Teilfolge der optimalen semidiskreten Kontrollen $\boldsymbol{U}$, sodass für $k \to 0$ gilt:

$$
\boldsymbol{\mathcal{U}}^+, \boldsymbol{\mathcal{U}} \to \boldsymbol{u}^* \ \text{ stark in } L^2(\boldsymbol{H}^1).
$$

Beweis:
Die Lemmata 5.2 bis 5.4 (und ihre Bemerkungen) zeigen zusammen mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass $(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{z}^*)$ das kontinuierliche Optimalitätssystem (2.13) erfüllt.

Die starke Konvergenz einer Teilfolge der optimalen Kontrollen folgt aus Lemma 5.1. □

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und allen danken, die egal auf welche Art und Weise bei der Entstehung dieser Diplomarbeit mitgewirkt haben.

Ein ganz großes Danke möchte ich meinen Eltern sagen, die immer an mich geglaubt haben und stets bestrebt waren alle meine Wünsche zu erfüllen. Oft wird erst rückblickend klar, wie sehr manche Menschen einen selber geprägt und was sie alles für einen getan und aufgegeben haben. Daher habe ich ihnen diese Arbeit als eine kleine Geste des Dankes und der Anerkennung ihrer jahrelangen Bemühungen gewidmet.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinem Betreuer, Prof. Dr. A. Prohl, bedanken, der mein Interesse an der Numerik und im Speziellen an der Optimierung mit seinen Vorlesungen und Seminaren geweckt und mir in dieser Arbeit die Freiheit gegeben hat, auch meinen eigenen Ideen nachzugehen. Danke für alle anregenden und lehrreichen Gespräche und die Unterstützung auch über den Rahmen der Diplomarbeit hinaus.

Ein weiteres sehr großes Dankeschön ist für Markus Klein, ohne den diese Arbeit in diesem Umfang nicht durchführbar gewesen wäre und der jederzeit gerne mit Engelsgeduld alle meine vielen Fragen, nicht nur auf dem Gebiet der Optimierung, in etlichen Diskussionen beantwortet hat.

Weiter möchte ich allen meinen Kommilitonen danken, mit denen ich teilweise stundenlang an den verschiedensten Aufgaben getüftelt habe und die ihr Wissen mit mir geteilt haben. Ganz besonders möchte ich dafür Monika Kuhn, Armand Heim und Kaan Sahin Danke sagen.

Zum Schluss, aber deswegen nicht weniger herzlich, möchte ich mich bei meinem besten Freund Tobias Brösamle bedanken, der mich insbesondere in den schwierigen Phasen dieser Arbeit immer wieder aufgefangen und ermutigt sowie auch über längere Strecken tapfer über meine Launen hinweggesehen hat. Danke.

Anhang

Maßtheorie

In Lemma 2.7 ist für die starke Konvergenz der Projektion notwendig, dass

$$\bigcup_{k\to 0} \{ p_k \in L^2(I) \Big| p_k|_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{P}_0 \} \text{ dicht in } L^2(I).$$

Beweisidee: Sei $v \in L^2(I)$ mit I ein endliches Intervall.

Schritt 1: Betrachte die Definition des Lebesgue-Integrals:
Per Definition $\exists \phi_i \in L^2(I)$ einfache Funktionen, d.h.

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{J_i} a_j \chi_{A_j},$$

wobei $A_j \subseteq I$ messbar, $a_j \in \mathbb{R}$, χ die charakteristische Funktion bezeichnet und $\phi_i \to v$ in $L^2(I)$ für $i \to \infty$.

Schritt 2: Es genügt also ein χ_A in $L^2(I)$ zu approximieren:
Verwende dafür die äußere Regularität des Lebesgue-Maßes μ, d.h.

$$\begin{aligned}\mu(A) = \inf_{A\subseteq V \text{ offen}} \mu(V) &\Leftrightarrow \exists V_i \text{ offen} : \mu(V_i) \searrow \mu(A) \text{ für } i \to \infty \\ &\Leftrightarrow \exists V_i \text{ offen} : \chi_{V_i} \to \chi_A \text{ in } L^2(I) \text{ für } i \to \infty.\end{aligned}$$

Schritt 3: Es genügt also ein χ_V in $L^2(I)$ zu approximieren mit $V \subseteq I$ offen:
Dabei lässt sich V wie folgt schreiben:

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i < \beta_i$ und alle Intervalle paarweise disjunkt.

Dann gilt

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu((\alpha_i, \beta_i)).$$

Da diese Summe absolut konvergiert, sei sie o.B.d.A so angeordnet, dass $\beta_i - \alpha_i > \beta_j - \alpha_j$ für alle $i < j$, also gilt damit

$$\sum_{i=1}^{N} \mu((\alpha_i, \beta_i)) \to \mu(V) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \chi_{(\alpha_i,\beta_i)} \to \chi_V \text{ in } L^2(I) \quad (\text{für } N \to \infty).$$

Schritt 4: Es genügt also ein einzelnes $\chi_{(\alpha,\beta)}$ zu approximieren:
Verwende, dass $\mathbb{R}$ eine abzählbare Topologie besitzt, also existieren $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i \in \mathbb{Q}$ und $i \in \mathbb{N}$, wobei $\widetilde{\alpha}_j \leq \widetilde{\alpha}_i$ und $\widetilde{\beta}_j \geq \widetilde{\beta}_i$ für alle $i < j$ mit

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i\right),$$

sodass gilt

$$\mu((\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i)) \to \mu((\alpha, \beta)) \Leftrightarrow \chi_{(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i)} \to \chi_{(\alpha,\beta)} \text{ in } L^2(I) \quad (\text{für } i \to \infty).$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[AB09] Alouges, François und Karine Beauchard: *Magnetization switching on small ferromagnetic ellipsoidal samples.* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 15(3):676–711, 2009.

[ACLP11] Agarwal, Shruti, Gilles Carbou, Stéphane Labbé und Christophe Prieur: *Control of a network of magnetic ellipsoidal samples.* Mathematical Control and Related Fields, 1(2):129–147, 2011.

[Ada78] Adams, Robert A.: *Sobolev spaces.* Acad. Pr., 2. Auflage, 1978.

[Alt06] Alt, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer, 5. Auflage, 2006.

[Baň05] Baňas, Ľubomír: *A numerical method for the Landau-Lifshitz equation with magnetostriction.* Math. Methods Appl. Sci., 28(16):1939–1954, 2005.

[BFG+09] Basu, Swaraj, Paul W. Fry, Mike R. J. Gibbs, Thomas Schrefl und Dan A. Allwood: *Control of the switching behavior of ferromagnetic nanowires using magnetostatic interactions.* Journal of Applied Physics, 105(8):083901, 2009.

[Els11] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, 7. Auflage, 2011.

[Eva10] Evans, Lawrence C.: *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 2. Auflage, 2010.

[GH93] Guo, Bo Ling und Min Chun Hong: *The Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 1(3):311–334, 1993.

[Gun03] Gunzburger, Max D.: *Perspectives in flow control and optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[KP06] Kruzík, Martin und Andreas Prohl: *Recent Developments in the Modeling, Analysis, and Numerics of Ferromagnetism.* SIAM Review, 48(3):439–483, 2006.

[LFv11] Lahtinen, Tuomas H. E., Kévin J. A. Franke und Dijken Sebastiaan van: *Electric-field control of magnetic domain wall motion and local magnetization reversal.* 2011.

[Lue69] Luenberger, David G.: *Optimization by vector space methods.* Wiley, 1969.

[Pro01] Prohl, Andreas: *Computational Micromagnetism.* Teubner, 1. Auflage, 2001.

[Rul96] RULLA, JIM: *Error analysis for implicit approximations to solutions to Cauchy problems.* SIAM J. Numer. Anal., 33(1):68–87, 1996.

[Růž04] RŮŽIČKA, MICHAEL: *Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung.* Springer, 2004.

[Sho97] SHOWALTER, RALPH E.: *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* American Mathematical Society, 1997.

[Trö09] TRÖLTZSCH, FREDI: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen: Theorie, Verfahren und Anwendungen.* Vieweg + Teubner, 2. Auflage, 2009.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendete Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Tübingen, den 25. März 2013

Ailyn Schäfer