

Diplomarbeit

**Der Trajektorienraum des
Gradientenvektorfeldes einer
Morse-Smale-Funktion auf einer
riemannschen Mannigfaltigkeit**

vorgelegt von
CHRISTIAN ANDREAS POWER GUERRA

20. Mai 2013

betreut von
PROF. DR. FRANK LOOSE
am Mathematischen Institut
der Eberhard Karls Universität Tübingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Vorwort

In dieser Arbeit über Differentialgeometrie behandeln wir das zweite Kapitel aus dem Buch „*Morse Homology*“ von Matthias Schwarz [Sch93]. Der funktionalanalytische Zugang zur Morse-Homologie, den wir hier vorstellen, kann als eine endlich-dimensionale Version der Floer-Homologie, welche Gegenstand aktueller Forschung ist, verstanden werden. Wir setzen beim Leser keine Kenntnisse der Morse-Theorie voraus und fassen deshalb kurz die wesentliche Theoreme zusammen.

Wiederholung der Morse-Theorie

Die Morse-Theorie, welche man Marston Morse zu Ehren benannt hat, ist dem Gebiet der Differentialtopologie zugeordnet. Indem man spezielle differenzierbare Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit betrachtet, erhält man einen direkten Zugang zu seiner Topologie. Die älteste dem Autor bekannte Veröffentlichung von Marston Morse erschien 1929 in der Transactions of the American Mathematical Society.

Für die Wiederholung sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Wir setzen voraus, dass dem Leser die Begriffe Homotopie¹, relative Homotopie², Homotopietyp³ und Deformationsretrakt⁴ bekannt sind. Die Definitionen stehen unten als Fußnoten, aber für den Inhalt dieser Arbeit sind sie nicht wichtig.

Definition. Wir nennen $p \in M$ einen **kritischen Punkt** von f , wenn $df_p = 0$ ist. Wir nennen einen kritischen Punkt $p \in M$ **nicht-degeneriert**, wenn die Hessische $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} |_p)_{i,j}$ nicht-ausgeartet ist. Sei p ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f . Unter dem

¹Seien $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Wir sagen, dass f_0 **homotop** zu f_1 ist, wenn es eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t: X \rightarrow Y$ gibt, wobei $t \in [0, 1]$ sei, so dass die induzierte Abbildung $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, die gegeben ist durch $F(x, t) = f_t(x)$, stetig ist. Die Familie (f_t) nennt man eine **Homotopie** von f_0 nach f_1 .

²Sei $A \subseteq X$ und $f_0|_A = f_1|_A$. Wir sagen, dass f_0 **homotop relativ A** zu f_1 ist, wenn es eine Familie von stetigen Abbildungen $f_t: X \rightarrow Y$ gibt, wobei $t \in [0, 1]$ sei, so dass $\forall t \in [0, 1] f_t|_A = f_0|_A = f_1|_A$ gelte und die induzierte Abbildung $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ stetig sei. Die Familie (f_t) nennen wir eine **Homotopie relativ A** von f_0 nach f_1 .

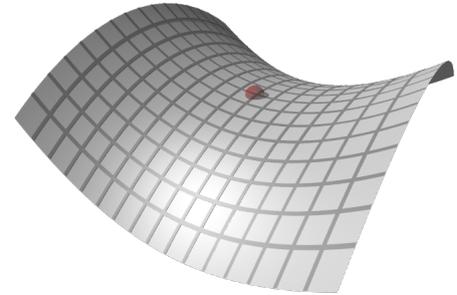
³Wir sagen, dass X denselben **Homotopietyp** wie Y hat, wenn es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g$ homotop zu $\mathbb{1}_Y$ und $g \circ f$ homotop zu $\mathbb{1}_X$ ist. f nennen wir dann eine **Homotopieäquivalenz**.

⁴Ein **Deformationsretrakt** von X auf einen Teilraum A ist eine Homotopie relativ A von der Inklusion $A \hookrightarrow X$ und der Identität $\mathbb{1}_X: X \rightarrow X$.

Morse-Index von p verstehen wir die maximale Dimension aller Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_p)_{i,j} (U \times U)$ negativ definit ist.⁵ Wir bezeichnen den Index mit $\mu(p)$.

Wir nennen f eine **Morse-Funktion**, wenn alle kritischen Punkte von f nicht-degeneriert sind. Wir nennen eine Morse-Funktion **koerziv**, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ das Sublevel $M^a := f^{-1}(-\infty, a]$ kompakt ist.

Wir möchten ein einfaches Beispiel für einen kritischen nicht-degenerierten Punkt geben: Betrachte die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x^2 + y^2$. Es gilt $\text{grad } f(0,0) = 0$, die Hessische lautet $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Somit ist der Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f und sein Morse-Index lautet $\mu(0) = 1$. Das rechte Bild illustriert gut, wieso man hier von einem Sattelpunkt spricht.



Das Morse-Lemma besagt nun: Wenn f einen kritischen nicht-degenerierten Punkt besitzt, dann existiert eine Karte um diesen Punkt, so dass die lokale Darstellung von f bzgl. dieser Karte ein rein quadratisches Polynom von der Bauart wie im obigen Beispiel ist. Wie viele Monome ein positives bzw. negatives Vorzeichen bekommen, wird durch den Morse-Index festgelegt.

Lemma (Morse-Lemma). Sei p ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f mit $\mu(p) = \lambda$. Dann existiert eine Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq_o \mathbb{R}^n$ um p , wobei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ und $\varphi(p) = 0$ ist, so dass f die lokale Darstellung

$$f \circ \varphi^{-1} = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

hat. Eine solche Karte φ nennen wir auch eine **Morse-Karte** um p .

Ein einfaches Korollar des Morse-Lemmas ist, dass die kritischen Punkte einer Morse-Funktion isoliert sein müssen.

In der Morse-Theorie studiert man die Untermannigfaltigkeiten $M^a := \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$, wobei a ein regulärer Wert von f sei, d.h. $\forall p \in f^{-1}(a)$ ist df_p surjektiv also $df_p \neq 0$. Das nächste Theorem beschreibt wie sich der Homotopietyp von M^a ändert, wenn a größer wird.

Theorem. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei außerdem $f^{-1}([a, b])$ kompakt (das ist z.B. gegeben, wenn M kompakt ist oder f koerziv ist).

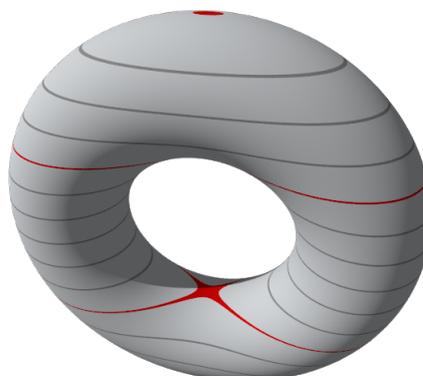
(a) Enthält $f^{-1}([a, b])$ keine kritischen Punkte von f , dann ist M^a homöomorph zu M^b .
Genauer: M^a ist ein Deformationsretrakt von M^b , so dass die Inklusion $M^a \hookrightarrow M^b$ eine Homotopieäquivalenz ist.

⁵Nach dem Trägheitssatz von Sylvester ist der Morse-Index wohldefiniert.

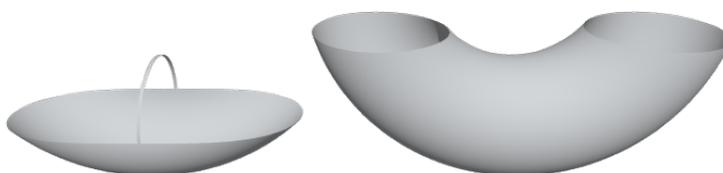
(b) Enthält $f^{-1}([a, b])$ genau einen nicht-degenerierten kritischen Punkt p mit $a < f(p) < b$, dann hat M^b den Homotopietyp von M^a verklebt mit einer λ -Zelle.⁶

Wir möchten anhand des Standardbeispiels der Morse-Theorie veranschaulichen, wie man das obige Theorem verstehen soll.

Sei M der Torus. Man stelle den Torus auf die x, y -Ebene. Wähle als Morse-Funktion die Projektion auf der z -Achse. Im rechten Bild sind verschiedene Niveaus dieser Morse-Funktion gezeichnet worden. Kritische Niveaus sind rot gezeichnet worden. (M, f) besitzt vier kritische Punkte, wobei drei zu sehen sind (der tiefste Punkt vom Torus ist auch ein kritischer Punkt). Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 , wobei p_1 der höchste und p_4 der tiefste Punkt sei.



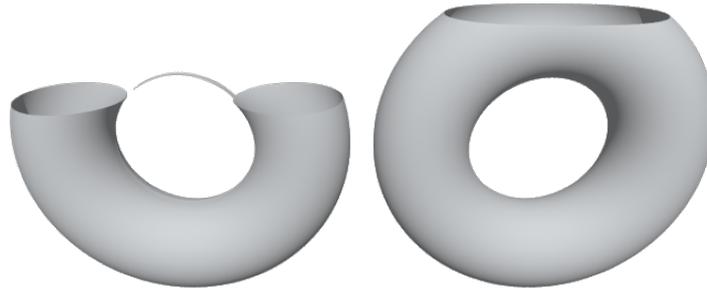
Für $i = 1, \dots, 4$ sei $w_i := f(p_i)$. Die Morse-Indizes der kritischen Punkte lauten $\mu(p_4) = 2$, $\mu(p_3) = \mu(p_2) = 1$ und $\mu(p_1) = 0$. Es gibt kein $p \in M$ mit $f(p) < w_4$, da p_4 der tiefste Punkt ist. Deshalb muss $\forall a < w_4$ für das Sublevel $M^a = \emptyset$ gelten. Wenn a den kritischen Wert w_4 passiert, dann sieht M^a wie ein Schale aus. Dieses Objekt ist homöomorph zu einer 2-Zelle. Wenn a den kritischen Wert w_3 passiert, dann beobachtet man das rechte Bild:



Da $\mu(p_2) = 1$ ist, sagt unser Theorem voraus, dass der Homotopietyp von M^a der eines Korbes verklebt mit einem Henkel (eine 1-Zelle) sein muss. Das haben wir im linken Bild gezeichnet. Man kann gut erkennen, dass man den linken Raum als Deformationsretrakt vom rechten Raum realisieren kann, also ist der Homotopietyp von M^a der von $M^{a'}$ verklebt mit einer 1-Zelle, wobei $w_4 < a' < w_3$ sei.

Passiert a nun den kritischen Wert w_2 , dann beobachtet man das rechte Bild:

⁶Eine λ -Zelle ist die Einheitskreisscheibe im \mathbb{R}^λ . Der Rand der Einheitskreisscheibe wird an M^a verklebt.



Der kritische Punkt p_3 hat ebenfalls den Morse-Index 1. Deshalb haben wir im linken Bild M^b für $w_3 < b < w_2$ mit einer 1-Zelle verklebt gezeichnet. Auch hier beobachtet man, dass das linke Bild ein Deformationsretrakt vom rechten Bild ist.

Passiert man schließlich den letzten kritischen Wert w_1 , so muss man nur noch eine 0-Zelle, d.h. einen Punkt, hinzufügen. Damit hat man der Topologie des Torus die Struktur eines CW-Komplexes gegeben.

Eine Folgerung des obigen Theorems, die gleichzeitig einen Höhepunkt der klassischen Morse-Theorie darstellt, ist das berühmte *Theorem der starken Morse-Ungleichungen*, welches wir der Vollständigkeit halber ebenfalls zitieren. Diese Ungleichungen geben untere Schranken für die Anzahl der kritischen Punkte einer Morse-Funktion vor.

Theorem (Morse-Ungleichungen). Sei b_k die k -te **Bettizahl** von M (das ist die Dimension der Kohomologiegruppe $H^k(M, \mathbb{R})$) und sei c_k die Anzahl der kritischen Punkte vom Index k von f . Wenn f ein Morse-Funktion ist, dann gilt für alle $k = 1, \dots, n-1$ die Ungleichung

$$c_k - c_{k-1} + c_{k-2} - \dots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + b_{k-2} - \dots + (-1)^k b_0.$$

Weiterhin gilt die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k = \chi(M),$$

wobei die **Euler-Charakteristik** $\chi(M)$ definiert ist durch

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k.$$

In dem Standard-Beispiel der Morse-Theorie gilt $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. Da M zusammenhängend ist, ist $b_0 = 1$. Da M kompakt ist und keinen Rand besitzt, gilt wegen der Poincaré-Dualität $b_2 = 1$. Mithilfe der Morse-Ungleichungen rechnet man nun leicht aus, dass $b_1 = 2$ sein muss.

Inhalt der Arbeit: Morse-Homologie

Wir möchten einen Überblick über die Thematik geben: Ende der 80er Jahre publizierte Andreas Floer mehrere Artikel, in denen er eine Homologie-Theorie entwickelte, die

er dann anschließend benutzen konnte, um die berühmte Arnold Vermutung aus der mathematischen Physik zeigen zu können. Diese Homologie-Theorie nennt man heute Floer-Homologie. Man sagt, dass sich Andreas Floer von der Morse-Homologie hat inspirieren lassen. Die Morse-Homologie wurde implizit von Stephen Smale in den 50er Jahren entdeckt und von Edward Witten in 1982 wiederentdeckt. Klassische Morse-Homologie lässt sich nicht auf den Räumen der Arnold Vermutung entwickeln, da der Morse-Index in dieser Situation i.Allg. unendlich ist. Aber der *relative Morse-Index* bleibt endlich. Damit hatte Andreas Floer einen Ansatzpunkt um seine Homologie-Theorie entwickeln zu können.

Die Morse-Homologie, wie sie von Smale, Milnor und anderen entwickelt wurde, wird in [Sch93] mit mehr analytischen Methoden neu entwickelt, die dann auf den unendlich-dimensionalen Fall der Floer-Homologie verallgemeinert werden können. In dieser Arbeit habe ich mir das zweite Kapitel „*The trajectory space*“ ausgesucht und einen Abschnitt darin ausführlich ausgearbeitet. Im folgenden formulieren wir das Haupttheorem dieser Diplomarbeit formulieren und auf technische Schwierigkeiten hinweisen. Für diesen Abschnitt sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion.

Die neue Idee in der Morse-Homologie ist, dass man nicht mehr die Untermannigfaltigkeiten M^a betrachtet, sondern das negative Gradienten-Vektorfeld $-\text{grad } f$. Stephen Smale hat in einem Artikel gezeigt, dass man die Morse-Ungleichungen aus dem dynamischen System von $-\text{grad } f$ erhält, wenn man vom Paar (f, g) eine gewisse Transversalitätsbedingung verlangt, welche wir im Folgenden als die **Morse-Smale Bedingung** bezeichnen.⁷ Man untersucht die Integralkurven, die von einem kritischen Punkt „starten“ und in einen anderen kritischen Punkt „münden“.

Definition. Sei f eine koerzive Morse-Funktion, seien $x, y \in M$ kritische Punkte von f und sei α eine Integralkurve von $-\text{grad } f$. Wir nennen α eine **Instantone** von x nach y , wenn $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = x$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = y$ ist (man beachte, dass die Integralkurve für alle Zeiten existiert, da f koerziv ist). Die Menge aller Instantonen von x nach y , $\mathcal{M}_{x,y}^f$, bezeichnen wir als den **Trajektorienraum** von x nach y .

Wir bezeichnen den **relativen Morse-Index** von x, y als die Zahl $\mu(x) - \mu(y)$.

In [Sch93] verfolgt man die Strategie, dass man dem Trajektorienraum $\mathcal{M}_{x,y}^f$ die Struktur einer endlich-dimensionalen Hilbert-Untermannigfaltigkeit gibt. In dieser Arbeit werden wir ausgiebig die erforderlichen analytischen Grundlagen erarbeiten und anschließend die *Sobolev-Mannigfaltigkeit* $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ konstruieren. Anschließend werden wir das Hilbertraum-Bündel $H^{1*}\tau_M$ über $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ definieren und darauf den glatte Schnitt

$$\Phi: \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \rightarrow H^{1*}\tau_M, \quad c \mapsto \dot{c} + \text{grad } f \circ c \in L^2(c^*TM)$$

⁷Die stabile und instabile Mannigfaltigkeit eines kritischen Punktes müssen sich transversal schneiden. Diese Begriffe präzisieren wir in Abschnitt 2.3; vgl. [Sma60].

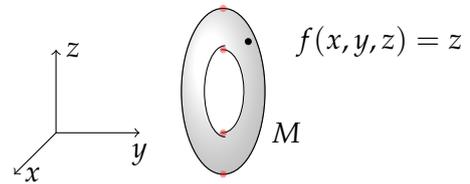
betrachten, wobei \dot{c} die schwache Ableitung von c sei.

Theorem. Seien (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion und x, y kritische Punkte von f . Es existiert dann ein Baire-Raum G mit $g \in G$, dessen Elemente riemannschen Metriken sind. Bis auf eine Ausnahmemenge der 1. Baire Kategorie gilt für alle Metriken $g' \in G$, dass das Paar (f, g') Morse-Smale ist. Der Trajektorienraum $\mathcal{M}_{x,y}^f$ (grad f sei bzgl. eines Morse-Smale Paares (f, g') gebildet) zwischen zwei kritischen Punkten von f ist eine endlich-dimensionale Hilbert-Untermannigfaltigkeit. Falls $\mathcal{M}_{x,y}^f$ nicht-leer ist, dann ist ihre Dimension auf jeder Zusammenhangskomponente gleich dem relativen Morse-Index von x, y , d.h. es gilt die Formel

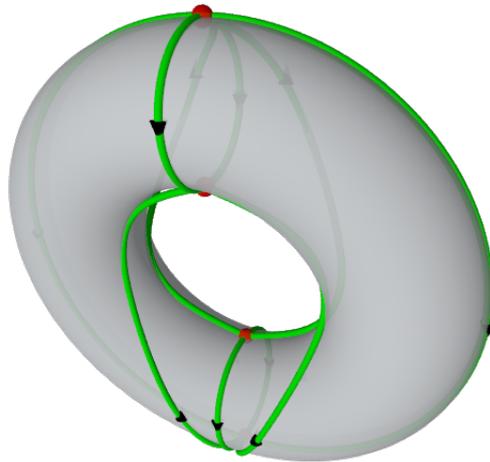
$$\dim \mathcal{M}_{x,y}^f = \mu(x) - \mu(y).$$

Wir möchten anhand eines Beispiels das bisher gesagt illustrieren:

Wir starten mit dem Standardbeispiel der Morse-Theorie, d.h. M sei der Torus im \mathbb{R}^3 , der aufrecht auf der x, y -Ebene steht. Die Morse-Funktion sei die Projektion auf die z -Achse. Wir versehen den Torus mit der induzierten Metrik g des \mathbb{R}^3 .



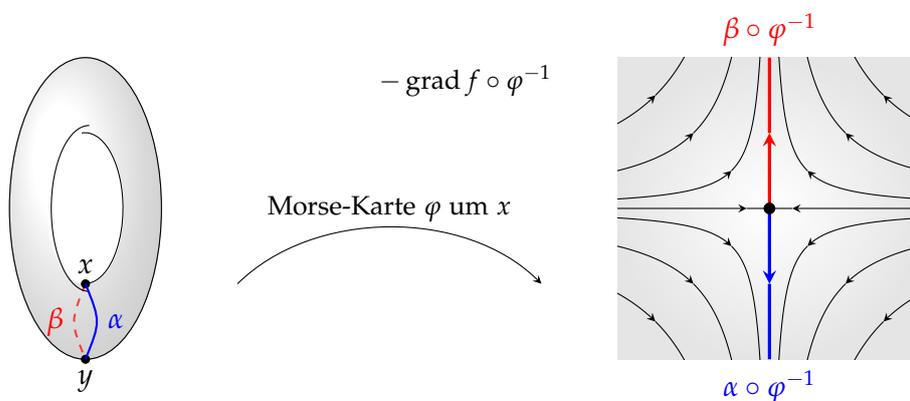
Das Paar (f, g) ist *nicht* Morse-Smale, d.h. wir müssen die riemannsche Metrik g ein wenig stören um eine neue Metrik \tilde{g} zu erhalten, so dass (f, \tilde{g}) Morse-Smale ist. Eine solche Störung kann man realisieren indem man den Torus ein wenig nach „vorne“ neigt.⁸ Im nächsten Bild skizzieren wir den „geneigten Torus“ mit seinem negativen Gradienten-Vektorfeld $-\text{grad } f$:



⁸In Abschnitt 2.3 werden wir uns an dieser Stelle mit einer schwachen Existenzaussage begnügen müssen. In einem Artikel von Raoul Bott[Bot88] wird behauptet, dass die explizite Berechenbarkeit des Morse-Kettenkomplexes (im homologischen Sinne) i.Allg. an der schwachen Existenzaussage scheitert.

Wir erläutern das Bild: Die vier roten Kugeln sollen die kritischen Punkte von (M, f) darstellen. Diese haben wegen der Neigung des Torus leicht geänderte Koordinaten im Vergleich zum Standardbeispiel der Morse-Theorie. Weiterhin erkennt man, dass alle Integralkurven von $-\text{grad } f$ nach unten fließen (das ist bedingt durch das negative Vorzeichen vor $\text{grad } f$). Es wurden alle Integralkurven gezeichnet, welche von einem der beiden mittleren Punkte „starten“ oder in einen der beiden mittleren Punkte „münden“. Man kann gut erkennen, dass es wegen der leichten Neigung keine Integralkurve gibt, welche zwei mittlere kritische Punkte miteinander verbindet. Aus diesem Grund ist das neue Tupel (f, g) Morse-Smale (ohne Beweis).

Betrachte nun die beiden unteren kritischen Punkte des Torus. y sei der tiefste kritische Punkt und x der darüber. Es gilt $\mu(x) = 1$ und $\mu(y) = 0$, d.h. der relative Morse-Index von x, y lautet 1. Wir möchten nun plausibel machen, wieso $\mathcal{M}_{x,y}^f$ genau einen Freiheitsgrad besitzt. Betrachte um x eine Morse-Karte φ :



Im linken Bild haben wir die Neigung des Torus ignoriert, um ihn besser zeichnen zu können. Im rechten Bild haben wir $-\text{grad } f \circ \varphi^{-1}$ qualitativ gezeichnet.⁹ Man kann im rechten Bild gut erkennen, dass es nur zwei Richtungen gibt, aus denen eine Instantone von x nach y starten kann. Wegen der Eindeutigkeit der ODE muss also jede andere Instantone von x nach y eine Umparametrisierung von α bzw. β sein, denn alle anderen Integralkurven fließen an dem kritischen Punkt vorbei. Wenn wir nun die Instantone α fixieren, dann hat ein lokales Koordinatensystem um $\alpha \in \mathcal{M}_{x,y}^f$ folgende Form:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{x,y}^f, \quad t \mapsto \alpha(\cdot + t),$$

wobei

$$\alpha(\cdot + t): \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \tau \mapsto \alpha(\tau + t)$$

⁹Tatsächlich haben wir rechts den Gradienten von $-x^2 + y^2$ gezeichnet, d.h. Integralkurven vom Vektorfeld $\begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Es gilt $-\text{grad } f \circ \varphi^{-1} = (g^{ij}(x, y)) \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}$, wobei die Matrix $(g^{ij}(x))$ die lokale Darstellung der riemannschen Metrik bzgl. φ sei. Wegen der speziellen Lage des kritischen Punktes gilt $g^{ij}(0) = \delta^{ij}$, wobei δ^{ij} das Kronecker-Delta sei und wir ausgenutzt haben, dass φ eine zentrierte Karte ist. I.Allg. ist zu erwarten, dass die Kurven links und rechts neben $\alpha \circ \varphi^{-1}$ bzw. $\beta \circ \varphi^{-1}$ etwas verzerrter verlaufen.

sei. Man sieht also, dass $\mathcal{M}_{x,y}^f$ genau einen Freiheitsgrad besitzt.

Für den Fall, dass x der oberste kritische Punkt und y der unterste kritische Punkt ist, macht man sich klar, dass alle Instantonen, die nicht in $\mathcal{M}_{x,y}^f$ liegen, bereits im Bild eingezeichnet worden sind. Man erkennt also, dass bis auf einer Nullmenge (bzgl. dem Oberflächenmaß des Torus) jeder Punkt auf dem Torus von einer Instantone in $\mathcal{M}_{x,y}^f$ getroffen wird. Da diese Oberfläche zweidimensional ist, kann man das als ein Plausibilitätsargument nehmen, dass $\mathcal{M}_{x,y}^f$ zwei Freiheitsgrade besitzt.

Als nächstes beschreiben wir den Aufbau dieser Diplomarbeit. Die Ausarbeitung ist grob in zwei Kapitel unterteilt.

- Im ersten Kapitel erarbeiten wir uns die wesentlichen analytischen Hilfsmittel. Wir beginnen mit Grundbegriffen aus der linearen Funktionalanalysis, die in dieser Form möglicherweise nicht in jeder Funktionalanalysis Vorlesung vorkommen. Dazu gehören *vollständig normierbare topologische Vektorräume, der Raum der k -fach multilinearen beschränkten Operatoren, topologische Komplementierbarkeit von Unterräumen und Fredholm-Operatoren*. Danach gehen wir zur Nichtlinearen Funktionalanalysis über und klären dort den Begriff des *Fréchet-Differentials* und formulieren dann den *Satz von Sard-Smale*.

Der Abschnitt 1.3 stellt einen wichtigen Punkt in dieser Diplomarbeit dar. Dort definieren wir *Banach- und Hilbert-Mannigfaltigkeiten* und behandeln u.a. den *Satz vom regulären Wert* und definieren *Banachraum-Bündel*. Anschließend deuten wir an, wie man den *Zusammenhang* auf Banach-Mannigfaltigkeiten definieren könnte und stellen dann die *Spaltung des Doppelten Tangentialbündels* $T(TM)$ vor.

Im Abschnitt 1.4 konstruieren wir die *Sobolev-Mannigfaltigkeit* $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und versuchen auf möglichst alle technischen Probleme einzugehen.

- Im zweiten Kapitel wenden wir unsere analytische Vorarbeit auf die Morse-Homologie an. Wie bereits im Vorwort angedeutet, versuchen wir dem Trajektorienraum $\mathcal{M}_{x,y}^f$ die Struktur einer endlich-dimensionalen Hilbert-Untermannigfaltigkeit zu geben, indem wir den glatten Schnitt

$$c \mapsto \dot{c} + \text{grad } f \circ c$$

untersuchen. Zuerst zeigen wir, dass das Nullstellengebilde dieses Schnittes genau der Trajektorienraum $\mathcal{M}_{x,y}^f$ ist. Anschließend betrachten wir das Differential und zeigen mithilfe funktionalanalytischer Methoden, dass dieser Operator ein Fredholm-Operator ist. Anschließend zeigen wir, dass sein Fredholm-Index gleich dem relativen Morse-Index ist. Im nächsten Schritt modifizieren wir den Schnitt zu

$$c \mapsto \dot{c} + A_* \text{grad } f \circ c,$$

wobei A ein geeigneter glatter Schnitt im Endomorphismen Bündel von TM ist. Der Term A soll dabei also ausdrücken, dass wir den Gradienten bzgl. einer

anderen riemannschen Metrik \tilde{g} bilden. Auf diese Art werden wir eine geeignete Menge von Metriken konstruieren, so dass fast alle Metriken in dieser Menge die Morse-Smale Bedingung erfüllen. Zum Schluss fassen wir alle Ergebnisse zum Haupt-Theorem zusammen.

Notation

Zur Notation: Wir verkürzen die Formulierung „sei U eine offen Teilmenge von M “ durch „ $U \subseteq_o M$ “. Falls U eine offen Umgebung von $p \in M$ ist, schreiben wir auch $U = U(p) \subseteq_o M$.

Für den analytischen Teil: Wenn eine Konstante M von anderen Konstanten oder Mengen abhängt, z.B. hänge M von $\varepsilon > 0$ und der Menge X ab, dann schreiben wir einfach $M = M(\varepsilon, X) \in \mathbb{R}$. Dann bedeutet z.B. $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, dass es für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, welches von ε abhängen darf.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen Freunden, meiner Familie und meinem Betreuer danken, die mir immer mit viel Rat und Hilfe bei der Erstellung dieser Diplomarbeit zur Seite gestanden sind. Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

1. Analytische Hilfsmittel	1
1.1. Lineare Funktionalanalysis	1
I. Grundbegriffe	1
II. Komplementierbarkeit	14
III. Fredholm-Operatoren	19
1.2. Nichtlineare Funktionalanalysis	24
I. Das Fréchet-Differential und der Satz über implizite Funktionen . .	25
II. Der Satz von Sard-Smale	30
1.3. Geometrie von unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	31
I. Banach- und Hilbert-Mannigfaltigkeiten	31
II. Satz vom regulären Wert	40
III. Banach- und Hilbert-Bündel	43
IV. Spray und Exponentialabbildung	51
V. Zusammenhang und kovariante Ableitung	55
1.4. Eine Sobolev Mannigfaltigkeit	62
I. Klassische Theorie	64
II. Triviale Bündel mit trivialer Metrik	69
III. Nicht-triviale Bündel mit nicht-trivialer Metrik	75
IV. Die Hilbert-Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$	79
V. Das Hilbert-Bündel $\mathfrak{S}(\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)^*TM)$	85
2. Der Trajektorienraum	89
2.1. Analytische Beschreibung des Trajektorienraums	89
2.2. Fredholm Abbildungen und relativer Morse-Index	94
I. Ein Fredholm-Operator auf dem trivialen Bündel	94
II. Berechnung eines Fredholm-Index	100
III. Eine Fredholm-Abbildung	105
2.3. Transversalität	106
I. Ein Transversalitätsergebnis	106
II. Die Morse-Smale Bedingung für den Trajektorienraum	109
Anhang	113
A.1. Baire Räume	113
A.2. Die Schur-Eigenschaft	114

A.3. Erweiterung von Skalarprodukten	121
--	-----

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Die natürlichen Zahlen (ohne, mit 0), die ganzen, reellen und komplexen Zahlen
\mathbb{K}	\mathbb{K} steht für reellen Zahlen \mathbb{R} oder die komplexen Zahlen \mathbb{C}
$\text{Mat}_n \mathbb{R}$	Raum der reellen $n \times n$ Matrizen
$\text{GL}_n \mathbb{R}$	Gruppe der reellen invertierbaren $n \times n$ Matrizen
$\mathbb{1}$	Die identische Abbildung von einer Menge in sich selbst
$\text{Im}(f)$	Das Bild von $f: X \rightarrow Y$
$\text{Jac}(f)_x$	Die Jakobi-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$
$\text{lin } A$	Die lineare Hülle einer Teilmenge A eines Vektorraumes V . Das ist der kleinste Unterraum von V der A enthält
$\nabla_Y X$	Kovariante Ableitung eines Schnittes X nach einem Vektorfeld Y , Seite 45
$\bar{\mathbb{R}}$	Die kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, Seite 55
$\text{sgn}(x)$	Vorzeichen einer Zahl $x \in \mathbb{R}$
$\sigma(A)$	Spektrum eines beschränkten Operators $A: X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen
$F(X, Y)$	Menge der Fredholm Operatoren zwischen zwei Banachräumen
$K: TE \rightarrow E$	Zusammenhang auf einem Banach-Bündel $\pi: E \rightarrow M$, Seite 45
$L(X, Y)$	Vektorraum aller Operatoren zwischen zwei normierten Vektorräumen X, Y , Seite 5
$L^k(X, Y)$	Vektorraum aller beschränkten k -fachen Operatoren zwischen zwei normierten Vektorräumen X, Y , Seite 10
$U \subseteq X$	U ist eine relativ kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes X

$U \subseteq_o X$	U ist eine offene Teilmenge eines topologischen Raumes X
U°	Das Innere von U in einem topologischen Raum X
X'	Dualraum eines normierten Vektorraums X , Seite 5
$\complement U$	Das Komplement von U in einer Menge X
\bar{U}	Der Abschluss von U in einem topologischen Raum X ; eine Ausnahme ist $\bar{\mathbb{R}}$

1. Analytische Hilfsmittel

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion auf M . Sei $\text{grad } f: M \rightarrow TM$ das Gradienten-Vektorfeld von f . Der Trajektorienraum zum negativen Gradientenfluss von f ist definiert durch die Menge aller maximalen glatten Kurven, welche die ODE

$$\dot{c} = -\text{grad } f \circ c$$

erfüllen. Ziel dieses Kapitels ist es, die notwendigen analytischen Hilfsmittel zu erarbeiten, so dass wir den Trajektorienraum als eine abgeschlossene Hilbert-Untermannigfaltigkeit betrachten können.

1.1. Lineare Funktionalanalysis

Im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für die Abschnitte 1.1 und 1.2 seien alle Vektorräume \mathbb{K} -Vektorräume, außer es wird explizit etwas anderes gefordert.

I. Grundbegriffe

Definition 1.1.1 (Topologie). Sei X eine Menge und σ eine Teilmenge der Potenzmenge von X . Wir nennen σ eine **Topologie** auf X , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\emptyset \in \sigma$ und $X \in \sigma$.
- (ii) Ist I eine Indexmenge, so dass für jedes $i \in I$ die Menge $U_i \in \sigma$ ist, dann muss $\bigcup_{i \in I} U_i \in \sigma$ sein.
- (iii) Wenn $U_1 \in \sigma$ und $U_2 \in \sigma$ sind, dann muss $U_1 \cap U_2 \in \sigma$ sein.

Das Tupel (X, σ) (oder kürzer: X) nennen wir einen **topologischen Raum** und die Elemente in σ bezeichnen wir als **offene Mengen**. Das mengentheoretische Komplement einer offenen Menge bezeichnen wir als **abgeschlossene Menge**.

Seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir nennen f eine **stetige Abbildung**, wenn Urbilder offener Mengen offen sind. Wir nennen eine stetige Abbildung ein **Homöomorphismus**, wenn sie eine stetige Umkehrabbildung besitzt.

Definition 1.1.2 (Metrischer Raum). Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Metrik** auf X , wenn d folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$. Weiterhin gilt

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Diese Eigenschaft nennen wir **Definitheit**.

(ii) Für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Diese Eigenschaft nennen wir **Symmetrie**.

(iii) Für $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Diese Ungleichung nennen wir **Dreiecks-Ungleichung**.

Das Tupel (X, d) nennt man einen **metrischen Raum** (Falls die Metrik klar ist, schreibt man nur X).

Wir nennen $(x_n) \subseteq X$ eine **konvergente Folge**, wenn es ein $x \in X$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wir nennen $(x_n) \subseteq X$ eine **Cauchy-Folge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ die Ungleichung

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wir nennen einen metrischen Raum **vollständig**, wenn alle Cauchy-Folgen konvergieren.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist **stetig** in $x \in X$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ die Ungleichung

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wir nennen f eine **stetig Abbildung**, wenn f in jedem Punkt aus seinem Definitionsbereich stetig ist.

Eine stetige Abbildung heißt **Homöomorphismus**, wenn sie eine stetige Umkehrabbildung besitzt.

Kommentar 1.1.3. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und sei σ_{d_X} die Menge aller Teilmengen $U \subseteq X$, die folgende Eigenschaft erfüllen: Für alle $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass der **offene Ball** um x mit Radius ε , d.i. die Menge

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d_X(x, y) < \varepsilon\},$$

in U enthalten ist.

Man kann zeigen, dass σ_{d_x} eine Topologie auf X ist. Wir nennen sie die **metrische Topologie**. Es ist eine beliebige Übungsaufgabe, zu zeigen, dass für ein beliebiges $x \in X$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Menge $B(x, \varepsilon)$ ein Element in σ_{d_x} ist.

Weiterhin kann man zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn jede konvergente Folge $(a_n) \subseteq A$ ihren Grenzwert in A hat.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass eine Funktion stetig im Sinne von Definition 1.1.3 ist genau dann, wenn sie stetig bzgl. der metrischen Topologie ist im Sinne von Definition 1.1.1. Sofern wir nichts anderes fordern, betrachten wir ab jetzt einen metrischen Raum immer mit seiner metrischen Topologie.

Wir nennen einen topologischen Raum X (**vollständig metrisierbar**), wenn er homöomorph zu einem (vollständigen) metrischen Raum ist.

Definition 1.1.4 (Banachraum). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Norm** auf X , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ und $\forall x \in X$ gilt

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Diese Eigenschaft nennen wir **Homogenität**.

(ii) $\forall x, y \in X$ gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Diese Ungleichung nennen wir **Dreiecks-Ungleichung**.

(iii) $\forall x \in X$ gilt

$$\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Diese Eigenschaft nennen wir **positive Definitheit**.

Das Tupel $(X, \|\cdot\|)$ nennen wir einen **normierten Vektorraum** (Falls die Norm klar ist, schreibt man nur X).

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ eine Metrik auf X definiert. Wir nennen einen normierten Vektorraum **vollständig**, wenn er bzgl. der obigen Metrik vollständig ist. Ein **Banachraum** ist ein vollständig normierter Vektorraum.

Definition 1.1.5 (Hilbertraum). Sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** auf H , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\forall v_1, v_2, w \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle.$$

(ii) $\forall v, w \in H$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$$

(iii) $\forall v \in H$ gilt

$$\langle v, v \rangle \geq 0.$$

(iv) $\forall v \in H$ gilt

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Man kann zeigen, dass die Abbildung $v \mapsto \|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$ eine Norm auf H definiert.

Wir nennen einen normierten Vektorraum $(H, \|\cdot\|)$ einen **Prähilbertraum**, wenn es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H gibt, so dass alle $v \in H$ die Gleichung $\langle v, v \rangle^{1/2} = \|v\|$ gilt. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt **Hilbertraum**.

Üblicherweise notieren wir einen Hilbertraum mit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Kommentar 1.1.6. In Definition 1.1.4 haben wir mithilfe einer Norm $\|\cdot\|$ eine Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ definiert. Implizit haben wir so einen normierten Raum als einen metrischen Raum aufgefasst. Zusammen mit Kommentar 1.1.3 folgt, dass man jeden normierten Vektorraum mit einer Topologie versehen kann. Wir nennen diese spezielle Topologie die **Norm-Topologie**. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Vektoraddition und skalare Multiplikation stetige Funktionen bzgl. der Norm-Topologie sind.

Das nächste Lemma ist grundlegend, aber sein Beweis ist einfach.

Lemma 1.1.7. Sei X ein Banachraum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) U ist eine abgeschlossene Teilmenge von X .

(ii) U ist vollständig bzgl. der induzierten Norm von X .

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Sei $(u_n) \subseteq U$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $u_n \rightarrow x$. Da U abgeschlossen ist, gilt $x \in U$.

„(i) \Leftarrow (ii)“: Sei $(u_n) \subseteq U$ eine konvergente Teilfolge. (u_n) ist natürlich eine Cauchy-Folge und da U vollständig ist, liegt der Limes in U . \square

Definition 1.1.8. Sei X ein topologischer Raum, der zusätzlich eine Vektorraum-Struktur trägt. Wir nennen X einen **topologischen Vektorraum**, wenn die Vektoraddition und skalare Multiplikation stetige Funktionen bzgl. der Topologie sind.

Sei X ein topologischer Vektorraum. Wir sagen, dass X ein **(vollständig) normierbarer topologischer Vektorraum** ist, wenn es eine Norm $\|\cdot\|$ auf X gibt, so dass die Norm-Topologie des (vollständig) normierten Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$ mit der Topologie von X übereinstimmt.

Sei H ein topologischer Vektorraum. Wir sagen H ist **hilbertisierbar**, wenn es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H gibt, so dass $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum ist und die Norm-Topologie bzgl. der Norm $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ mit der Topologie von H übereinstimmt.

Kommentar 1.1.9. Bekanntermaßen kann man den Begriff der *konvergenten Folge* rein topologisch definieren. Wenn der topologische Raum *hausdorffsch* ist, d.h. Punkte können durch disjunkte offene Mengen getrennt werden, dann kann man zeigen, dass eine konvergente Folge genau einen Grenzwert besitzt.¹

Wir möchten im nachfolgenden erörtern, wieso der Begriff „Cauchy-Folge“ für beliebige topologische Räume eine heikle Angelegenheit ist.

Für beliebige metrisierbare topologische Räume kann man den Begriff der *Cauchy-Folge* nicht rein topologisch definieren. Wir möchten ein Beispiel geben: Betrachte $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $|\cdot|$ der Betrag auf \mathbb{R} sei, und (\mathbb{R}, d) mit der Metrik

$$d(x, y) := \arctan(|x - y|).$$

Behauptung: Die Identität $\mathbb{1}: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ ist ein Homöomorphismus. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \tan \varepsilon$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt wegen der strengen Monotonie von \arctan die Ungleichung $d(x, y) < \varepsilon$. Damit ist $\mathbb{1}: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ stetig. Betrachte $\mathbb{1}^{-1}: (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \arctan \varepsilon$. Wegen der strengen Monotonie von \tan gilt dann für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $d(x, y) < \varepsilon$ die Ungleichung $|x - y| < \delta$. Damit ist $\mathbb{1}^{-1}: (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig. Das zeigt die Behauptung.

Da die Identität ein Homöomorphismus ist, induzieren beide Metriken dieselbe Topologie auf \mathbb{R} . Da $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ gilt, ist $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d . Es ist klar, dass die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht in (\mathbb{R}, d) konvergiert.

Dieses Beispiel zeigt, dass man für beliebige metrisierbare topologische Räume den Begriff „Cauchy-Folge“ nicht unabhängig von der gewählten Metrik definieren kann.

Wir werden später in Kommentar 1.1.17 sehen, dass man eine Cauchy-Folge für normierbare topologische Vektorräume ohne Schwierigkeiten definieren kann, obwohl man in diesem Fall eine Norm wählen muss.

Definition 1.1.10. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume. Wir nennen eine lineare Abbildung $T: X \rightarrow Y$ einen **Operator**. Für den Spezialfall $Y = \mathbb{K}$ nennen wir einen Operator $T: X \rightarrow \mathbb{K}$ ein **lineares Funktional**.

Ein Operator $T: X \rightarrow Y$ ist **beschränkt**, wenn T die Einheitskugel von X , d.i. die Menge

$$B_X := \{x \in X \mid \|x\|_X < 1\},$$

auf eine beschränkte Menge in Y abbildet. Den Vektorraum (!) aller beschränkten Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $L(X, Y)$. Für den Spezialfall $Y = \mathbb{K}$,

¹Es ist nicht schwer zu sehen, dass jede metrische Topologie hausdorffsch ist. Damit sind insbesondere die Norm-Topologien hausdorffsch.

nennen wir den Vektorraum aller beschränkten linearen Funktionale $X' := L(X, \mathbb{K})$ den **Dualraum** von X .

Konvention: Für einen Operator $T: X \rightarrow Y$ klammern wir üblicherweise das Argument nicht ein, d.h. wir schreiben Tx anstatt $T(x)$.

Kommentar 1.1.11. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und $T: X \rightarrow Y$ ein beschränkter Operator. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es dann ein $M > 0$ geben muss, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad (*)$$

gilt. Wir definieren die **Operatornorm** von T durch

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \text{ gilt } \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\}.$$

$\|T\|_{L(X,Y)}$ ist also die kleinste reelle Zahl, die noch $(*)$ erfüllt. Für die Operatornorm gelten folgende äquivalente Formulierungen:

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Operatornorm eine Norm auf $L(X, Y)$ definiert. Ab jetzt bezeichnen wir stillschweigend mit $L(X, Y)$ das Tupel $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$.

Sei $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer normierter Vektorraum. Da $M = \|T\|_{L(X,Y)}$ die Ungleichung $(*)$ erfüllt, kann man für ein weiteres $S \in L(Y, Z)$ leicht die Ungleichung

$$\|S \circ T\|_{L(X,Z)} \leq \|S\|_{L(Y,Z)} \cdot \|T\|_{L(X,Y)}$$

folgern.

Proposition 1.1.12. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und $T: X \rightarrow Y$ ein Operator. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) T ist beschränkt.
- (ii) T ist stetig.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Angenommen es existiert ein $M > 0$, so dass für alle $x \in X$ die Gleichung $(*)$ erfüllt ist. Für $x, y \in X$ gilt dann

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq M\|x - y\|_X,$$

d.h. T ist global lipschitzstetig. Insbesondere ist T stetig.

„(ii) \Leftarrow (i)“: Angenommen T ist stetig. Dann ist T insbesondere in 0 stetig. *Behauptung:* Wenn T in 0 stetig ist, dann gibt es ein $M > 0$, so dass alle $x \in X$ die Ungleichung $(*)$ erfüllen.

Wir beweisen die Aussage indirekt. Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in X$, so dass

$$\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$$

ist. Notwendigerweise muss dann $x_n \neq 0$ gelten. Setze $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|_X}$. Aus $\|\tilde{x}_n\|_X = \frac{1}{n}$ folgt $\tilde{x}_n \rightarrow 0$ und mit der obigen Ungleichung gilt weiterhin

$$\|T\tilde{x}_n\|_Y > 1.$$

Insbesondere ist T unstetig in 0. Das zeigt die Behauptung. \square

Definition 1.1.13. Sei X ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X . Wir sagen, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent** sind, wenn es zwei Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass alle $x \in X$ die Ungleichung

$$c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$$

erfüllen.

Kommentar 1.1.14. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Relation aus Definition 1.1.13 eine Äquivalenzrelation ist.

Wenn $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen sind, dann ist es nicht schwer zu sehen, dass sie dieselbe Topologie und dieselben Cauchy-Folgen induzieren. Die Umkehrung dieser Aussage beweisen wir in der nächsten

Proposition 1.1.15. Angenommen die Topologien von $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ stimmen überein. Dann sind die Normen äquivalent.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Identität

$$\mathbb{1}: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), \quad x \mapsto x$$

ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\mathbb{1}$ ein stetiger Operator. Nach Proposition 1.1.12 gibt es ein $C > 0$, so dass $\forall x \in X$ die Ungleichung

$$\|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$$

gilt. Indem man $\mathbb{1}^{-1}$ betrachtet, erhält man analog wie oben eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung

$$\|x\|_1 \leq M \cdot \|x\|_2$$

bzw.

$$\frac{1}{M} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

erfüllt ist. Das zeigt die obige Behauptung. \square

Korollar 1.1.16. Sei X ein normierbarer topologischer Vektorraum und N die Menge aller Normen auf X , welche die Topologie von X erzeugen. Dann sind alle Normen in N äquivalent.

Wenn X ein vollständig normierbarer topologischer Vektorraum ist und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X ist, welche die Topologie von X erzeugt, dann ist $(X, \|\cdot\|)$ bereits ein Banachraum.

Der Beweis von Korollar 1.1.16 ist klar.

Kommentar 1.1.17. Wir führen nun Kommentar 1.1.9 fort: Wegen Korollar 1.1.16 können wir für einen normierbaren topologischen Vektorraum X eine Cauchy-Folge wie folgt definieren: Wir nennen $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchy-Folge, wenn es eine Norm $\|\cdot\| \in N$ gibt, so dass (x_n) eine Cauchy-Folge im normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ ist. Da äquivalente Normen dieselben Cauchy-Folgen induzieren, hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl der Norm aus N ab.

Kommentar 1.1.18. Seien X, Y normierbare topologische Vektorräume. Wenn $\|\cdot\|_X^* \sim \|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y^* \sim \|\cdot\|_Y$ äquivalente Normen auf X bzw. Y sind, dann ist es nicht schwer zu sehen, dass die induzierten Operatornormen $\|\cdot\|_{L^k(X,Y)}^*$ und $\|\cdot\|_{L^k(X,Y)}$ äquivalent sind. Dadurch kann man $L(X, Y)$ als einen normierbaren topologischen Vektorraum sehen.

Proposition 1.1.19. Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist, dann ist $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ ein Banachraum. Insbesondere ist der Dualraum eines normierten Vektorraumes immer ein Banachraum.

Wenn X ein normierbarer topologischer Vektorraum und Y ein vollständig normierbarer topologischer Vektorraum ist, dann ist $L(X, Y)$ ein vollständig normierbarer topologischer Vektorraum.

Einen Beweis von Proposition 1.1.19 findet man in [Wero7, II.1.4].

Definition 1.1.20. Seien X, Y normierte Vektorräume und $T: X \rightarrow Y$ ein beschränkter Operator. Wir definieren den Kokern von T durch $\text{coker } T := Y/\overline{\text{Im } T}$.

Kommentar 1.1.21. Wir übernehmen alle Bezeichnungen aus Definition 1.1.20. Sei $\pi: Y \rightarrow \text{coker } T$ die kanonische Projektion. Es ist klar, dass $\pi \circ T = 0$ gilt. Der Kokern von T ist durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig charakterisiert: Sei Z ein weiterer normierter Vektorraum und $S: Y \rightarrow Z$ ein beschränkter Operator, der $S \circ T = 0$ erfüllt, d.h. $\text{Im } T \subseteq \ker S$. Dann faktorisiert S eindeutig über π , d.h. es existiert ein

eindeutig bestimmter beschränkter Operator $\psi: \text{coker } T \rightarrow Z$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Z \\ & \searrow \pi & \nearrow \psi \\ & \text{coker } T & \end{array}$$

kommutieren lässt. Die eindeutige Existenz des beschränkten Operators ψ macht man sich durch den naheliegenden Homomorphiesatz für normierte Vektorräume klar.

Kommentar 1.1.21 motiviert nun unsere Definition der Kodimension eines Untervektorraumes.

Definition 1.1.22. Sei X ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ ein Unterraum. Es bezeichne $i: A \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion. Wir setzen

$$\text{codim } A := \dim(\text{coker } i) = \dim X/\overline{A}.$$

Als nächstes klären wir unsere Isomorphie-Begriffe für normierte Vektorräume.

Definition 1.1.23. Seien X, Y normierbare topologische Vektorräume und $T: X \rightarrow Y$ ein Operator.

Wir nennen T einen **(toplinearen) Isomorphismus**, wenn T stetig ist und es einen weiteren stetigen Operator $S: Y \rightarrow X$ gibt mit $TS = \mathbb{1}_Y$ und $ST = \mathbb{1}_X$. Wir sagen, dass X **isomorph** zu Y ist, wenn es einen toplinearen Isomorphismus zwischen X und Y gibt.

Seien nun $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume. Wir nennen T eine **Isometrie**, wenn für alle $x \in X$ die Gleichung

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

gilt. Wir nennen T einen **isometrischen Isomorphismus**, wenn es eine weitere Isometrie $S \in L(Y, X)$ gibt mit $TS = \mathbb{1}_Y$ und $ST = \mathbb{1}_X$. Wir sagen, dass X **isometrisch (isomorph)** zu Y ist, wenn es einen isometrischen Isomorphismus zwischen X und Y gibt.

Kommentar 1.1.24. Ein toplinearer Isomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Vektorräume. Ein isometrischer Isomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der normierten Vektorräume.

Kommentar 1.1.25. Wenn X und Y Banachräume sind, dann folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28; wird später bereitgestellt), dass $T \in L(X, Y)$ genau dann ein toplinearer Isomorphismus ist, wenn T ein bijektiver beschränkter Operator ist.

Wenn $T \in L(X, Y)$ eine Isometrie ist, dann muss T beschränkt und injektiv sein. Wenn $T \in L(X, Y)$ eine surjektive Isometrie ist, dann muss T bereits bijektiv sein und man kann leicht nachrechnen, dass T^{-1} auch eine Isometrie ist. Insbesondere ist T ein isometrischer Isomorphismus genau dann, wenn T eine surjektive Isometrie ist.

Wenn H, K Hilberträume sind und $T \in L(H, K)$ eine Isometrie ist, dann folgt aus der Polarisationsformel (vgl. Satz A.3.1), dass $\forall x, y \in H$ die Gleichung

$$\langle Tx, Ty \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$$

gilt.

Kommentar 1.1.26. Im Beweis von Proposition 1.1.15 haben wir gesehen, dass äquivalente Normen isomorphe normierte Vektorräume induzieren, da die Identität ein toplinearer Isomorphismus ist. Die Umkehrung gilt i.Allg. nicht: Wenn ein Vektorraum mit zwei verschiedenen Normen zu sich selbst isomorph ist (bzgl. den verschiedenen Normen), dann müssen die Normen nicht äquivalent sein. Wir geben ein Beispiel an, welches als Übungsaufgabe in [Wero7] gestellt ist: Sei

$$X := \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ und } x_n \neq 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

der Raum der abbrechenden Folgen. Betrachte die Normen

$$\|(x_n)\|_1 := \sup\{|x_1|, 2|x_2|, |x_3|, 4|x_4|, |x_5|, \dots\}$$

und

$$\|(x_n)\|_2 := \sup\{|x_1|, |x_2|, 3|x_3|, |x_4|, 5|x_5|, \dots\}.$$

Es ist klar, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume sind. *Behauptung: Beide Räume sind isomorph.* Betrachte dafür den Operator

$$T: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) \mapsto (x_1, 2x_2, \frac{1}{3}x_3, 4x_4, \frac{1}{5}x_5, \dots)$$

mit dem Umkehroperator

$$T^{-1}: (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1), \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) \mapsto (x_1, \frac{1}{2}x_2, 3x_3, \frac{1}{4}x_4, 5x_5, \dots).$$

Es gilt

$$\|T(x_n)\|_2 = \sup\{|x_1|, 2|x_2|, |x_3|, 4|x_4|, |x_5|, \dots\} = \|(x_n)\|_1,$$

d.h. T ist beschränkt. Weiterhin ist T^{-1} beschränkt, denn analog rechnet man

$$\|T^{-1}(x_n)\|_1 = \sup\{|x_1|, |x_2|, 3|x_3|, |x_4|, 5|x_5|, \dots\} = \|(x_n)\|_2.$$

T ist also ein toplinearer Isomorphismus zwischen den beiden Räumen. Das zeigt die Behauptung.

Behauptung: Die beiden Normen sind nicht äquivalent. Betrachte dafür die Folge $e_{2n+1} := (\delta_{k, 2n+1})_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt $\|e_{2n+1}\|_1 = 1$, aber $\|e_{2n+1}\|_2 = 2n + 1$. Damit können beide Normen nicht äquivalent sein.

Wir zitieren aus dem Buch von Werner [Wero7] zwei fundamentale Sätze der linearen Funktionalanalysis.

Satz 1.1.27 (Satz von Hahn-Banach). Sei X ein normierter Raum und U ein Untervektorraum. Zu jedem linearen Funktional $u': U \rightarrow \mathbb{K}$ existiert dann ein stetiges lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$x'|_U = u', \quad \|x'\| = \|u'\|.$$

Jedes stetige Funktional kann also normgleich fortgesetzt werden.

Theorem 1.1.28 (Satz von der offenen Abbildung). Seien X und Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. T bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Insbesondere ist ein bijektiver beschränkter Operator ein Isomorphismus.

Wir möchten nun multilineare beschränkte Operatoren definieren, d.h. wir möchten Definition 1.1.10 verallgemeinern. Dafür müssen wir klären welche Norm der Produktraum $X \times Y$ tragen soll, wenn X und Y normierte Räume sind.

Definition 1.1.29. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$. Für $(x, y) \in X \times Y$ definieren wir

$$\|(x, y)\|_p := \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{1/p} & \text{für } p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Schließlich bezeichnen wir mit $X \oplus_p Y$ das Tupel $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$.

Proposition 1.1.30. Seien X, Y normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$.

(i) $X \oplus_p Y$ ist ein normierter Vektorraum.

(ii) Sei $1 \leq q \leq \infty$ beliebig. Die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ sind äquivalent, d.h.

$$X \oplus_p Y \cong X \oplus_q Y$$

als topologische Vektorräume.

(iii) Wenn X und Y vollständig sind, dann ist auch $X \oplus_p Y$ vollständig.

(iv) Sei $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wir setzen $1/\infty = 0$). Dann gilt die Isomorphie (in der Kategorie der topologischen Vektorräume)

$$(X \oplus_p Y)' \cong X' \oplus_q Y'.$$

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

Zu (i): Es ist nicht schwer die Norm-Eigenschaften nachzurechnen.

Zu (ii): Man beachte, dass für $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ die Aussage klar ist, da alle Normen auf den \mathbb{R}^2 äquivalent sind. Damit existieren $c, C > 0$ mit, so dass für alle $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung

$$c\|(v, w)\|_p \leq \|(v, w)\|_q \leq C\|(v, w)\|_p$$

gilt. Für $v = \|x\|_X$ und $w = \|y\|_Y$ gilt insbesondere

$$c\|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_p \leq \|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_q \leq C\|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_p.$$

Aus $\|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_p = \|(x, y)\|_p$ folgt die Aussage.

Zu (iii): Wegen (ii) reicht es zu zeigen, dass $X \oplus_\infty Y$ vollständig ist. Das ist aber einfach zu sehen.

Zu (iv): Betrachte den Operator

$$T: X' \oplus_q Y' \rightarrow (X \oplus_p Y)', \quad T(x', y')(x, y) = x'(x) + y'(y).$$

Mit der Hölder-Ungleichung rechnet man

$$x'(x) + y'(y) \leq |x'(x) + y'(y)| \leq \|x'\| \cdot \|x\| + \|y'\| \cdot \|y\| \leq \|(x', y')\|_q \cdot \|(x, y)\|_p,$$

was $\|T\| \leq 1$ zeigt. Es ist weiterhin leicht zu sehen, dass T injektiv ist, denn angenommen es gilt $T(x', y') = 0$. Dann folgt $\forall x \in X$ die Gleichung

$$x'(x) = T(x', y')(x, 0) = 0,$$

was $x' = 0$ zeigt. Analog folgert man $y' = 0$, was die Injektivität von T zeigt.

Wir rechnen nun nach, dass T surjektiv ist. Sei $z' \in (X \oplus_p Y)'$. Da die Inklusionen $X \hookrightarrow X \oplus_p Y$ bzw. $Y \hookrightarrow X \oplus_p Y$ beschränkte Operatoren sind, folgt, dass $z'|X \in X'$ bzw. $z'|Y \in Y'$ ist. Wegen (ii) ist es klar, dass dann $(z'|X, z'|Y) \in X' \oplus_q Y'$ gilt. Weiterhin gilt $T(z'|X, z'|Y) = z'$. Also ist T ein beschränkter bijektiver Operator. Mit dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) folgt die Aussage. \square

Kommentar 1.1.31. Aus (ii) und (iv) folgt die (toplineare) Isomorphie

$$(X \oplus_p Y)' \cong X' \oplus_q Y'.$$

Dem Autor scheint die Aussage (iv) zu schwach zu sein und vermutet deshalb, dass wenn X und Y bessere Eigenschaften besitzen (z.B. wenn X, Y separable Hilberträume sind), dass dann die Abbildung T aus dem obigen Beweis eine Isometrie ist.

Kommentar 1.1.32. Seien X, Y normierte Räume. Solange wir nichts anderes sagen, meinen wir mit $X \times Y$ den normierten Raum $X \oplus_1 Y$. Für eine endliche Folge von normierten Vektorräumen (X_1, \dots, X_n) meinen wir mit $X_1 \times \dots \times X_n$ den normierten Raum

$$X_1 \oplus_1 \dots \oplus_1 X_n := X_1 \oplus_1 (X_2 \oplus_1 (\dots \oplus_1 X_n)),$$

wobei es unerheblich ist, in welcher Reihenfolge man oben klammert.

Wir verallgemeinern nun die Definition 1.1.10.

Definition 1.1.33. Seien X, Y normierte Vektorräume und $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine k -fach multilineare Abbildung

$$T: \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k\text{-mal}} \rightarrow Y$$

einen k -fachen Operator. Wir nennen einen k -fachen Operator **beschränkt**, wenn er die Menge

$$B_{X^k} := B_X \times \cdots \times B_X$$

k -mal

auf eine beschränkte Menge in Y abbildet. Der Vektorraum (!) aller beschränkten k -fachen Operatoren bezeichnen wir mit $L^k(X, Y)$.

Kommentar 1.1.34. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Es ist nicht schwer zu sehen, dass ein k -facher Operator T beschränkt ist, wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, \dots, x_k \in X$ gilt

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\|_Y \leq M \cdot \|x_1\|_X \cdots \|x_k\|_X.$$

Man kann Proposition 1.1.12 wie folgt verallgemeinern:

Eine k -fach multilineare Abbildung T von X nach Y ist genau dann stetig, wenn T beschränkt ist.

Der Beweis geht analog. Man kann die **k -fache Operatornorm** durch

$$\|T\|_{L^k(X, Y)} := \sup_{x_1, \dots, x_k \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x_1, \dots, x_k)\|_Y}{\|x_1\|_X \cdots \|x_k\|_X}$$

definieren. Auch hier gilt, dass $(L^k(X, Y), \|\cdot\|_{L^k(X, Y)})$ ein normierter Raum ist. Ab jetzt bezeichnen wir stillschweigend mit $L^k(X, Y)$ das Tupel $(L^k(X, Y), \|\cdot\|_{L^k(X, Y)})$.

Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist $L^k(X, Y)$ ein Banachraum. Wenn $\|\cdot\|_X^* \sim \|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y^* \sim \|\cdot\|_Y$ äquivalente Normen auf X bzw. Y sind, dann sind die induzierten k -fachen Operatornormen $\|\cdot\|_{L^k(X, Y)}^*$ bzw. $\|\cdot\|_{L^k(X, Y)}$ äquivalent. Damit gilt: Wenn X ein normierbarer topologischer Vektorraum und Y ein vollständig normierbarer topologischer Vektorraum ist, dann ist $L^k(X, Y)$ ein vollständig normierbarer Vektorraum.

Wenn X, Y normierte Vektorräume sind, dann kann man nachrechnen, dass die Abbildung

$$\Phi: L^k(X, Y) \rightarrow \underbrace{L(X, L(X, \dots, L(X, Y)))}_{k\text{-fach}}, \quad \Phi(T)(x_1)(x_2) \dots (x_k) := T(x_1, \dots, x_k) \quad (*)$$

einen isometrischen Isomorphismus definiert, wobei $L(X, L(X, \dots, L(X, Y)))$ die k -fach iterierte Operatornorm trage.

II. Komplementierbarkeit

Für diesen Abschnitt seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume.

Motivation. Sei V ein Vektorraum. In der Linearen Algebra lernt man, dass es zu jedem Untervektorraum $U \subseteq V$ einen **komplementären Untervektorraum** $U' \subseteq V$ gibt. Darunter verstehen wir einen Untervektorraum U' mit $U + U' = V$ und $U \cap U' = 0$. Man schreibt dann $U \oplus U' = V$. Bekanntermaßen ist U' i.Allg. nicht eindeutig. U' nennen wir auch ein **algebraisches Komplement** von U .

In der Kategorie der Banachräume möchte man eine ähnliche Aussage haben.

Definition 1.1.35. Wir nennen einen Unterraum $A \subseteq X$ **topologisch komplementierbar** bzw. wir sagen, dass A in X **spaltet**, falls es einen weiteren Unterraum $B \subseteq X$ gibt, so dass die Abbildung

$$A \times B \rightarrow X, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

ein Homöomorphismus ist, wobei $A \times B$ mit der Produktnorm $\|(a, b)\|_{A \times B} := \|a\|_X + \|b\|_X$ versehen sei. Wir schreiben dann

$$A \oplus_{\text{top}} B = X \quad \text{bzw.} \quad A \oplus B = X.$$

B nennen wir ein **topologisches Komplement** von A . Anstatt „ A spaltet in X “ sagen wir auch „ (X, A) spaltet“.

Kommentar 1.1.36. Topologisch komplementierbar zu sein ist eine extrinsische Eigenschaft. Wenn A ein abgeschlossener Unterraum von X ist, dann ist A nach Lemma 1.1.7 selbst ein Banachraum. Es ist dann klar, dass A in A spaltet, denn in diesem Fall ist durch den Unterraum $0 \subseteq A$ ein topologisches Komplement gegeben. Natürlich folgt daraus aber nicht, dass A in X spaltet.

Kommentar 1.1.37. Angenommen A, B sind lineare Unterräume von X mit $A \oplus_{\text{top}} B = X$. *Behauptung:* Dann müssen A und B notwendigerweise abgeschlossen sein. Das sieht man wie folgt: Nach Voraussetzung ist

$$\Phi: A \times B \rightarrow X, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

ein Homöomorphismus. Es ist klar, dass die Unterräume $A \times 0$ und $0 \times B$ abgeschlossen in $A \times B$ sind. Weiterhin gilt $\Phi(A \times 0) = A$ bzw. $\Phi(0 \times B) = B$. Das zeigt die Behauptung.

Kommentar 1.1.38. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $B \subseteq X$ ein algebraisches Komplement von A . *Behauptung:* Wenn B abgeschlossen ist, dann spaltet A in X und B ist ein topologisches Komplement von A . Der Beweis ist evident: Weil A, B abgeschlossen sind, sind es nach Lemma 1.1.7 Banachräume. Damit ist $A \times B$ (mit der Produkt-Norm

$\|(a, b)\|_{A \times B} = \|a\|_X + \|b\|_X$) ein Banachraum; vgl. Proposition 1.1.30. Die lineare Abbildung

$$\Phi: A \times B \rightarrow X, \quad (a, b) \rightarrow a + b$$

ist wegen der Dreiecksungleichung stetig. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) ist Φ ein toplinearer Isomorphismus, also insbesondere ein Homöomorphismus. Das zeigt die Behauptung.

Für die Theorie entscheidend ist das nächste

Beispiel 1.1.39. Setze $X := \ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ und betrachte den Unterraum $A := c_0 := \{(x_n) \in \ell^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. A ist abgeschlossen, aber (X, A) spaltet nicht (vgl. [Wero7, IV.6.5] für einen Beweis).

Tatsächlich kann man in jedem Banachraum, der kein Hilbertraum ist, immer einen abgeschlossenen Unterraum finden, der nicht komplementierbar ist. Das wurde in einem Artikel von J. Lindenstrauss und L. Tzafriri [LT71] gezeigt:

Theorem. *Angenommen jeder abgeschlossene Unterraum von X spaltet. Dann ist X isomorph zu einem Hilbertraum.*

Die Umkehrung des obigen Satzes ist ebenfalls richtig: In einem Hilbertraum spaltet jeder abgeschlossene Unterraum.

Satz 1.1.40. *Sei A ein abgeschlossener Unterraum von H . Dann ist das orthogonale Komplement von A , d.i. die Menge*

$$A^\perp := \{h \in H \mid \forall a \in A \text{ gilt } \langle a, h \rangle_H = 0\},$$

ein topologisches Komplement von A .

Für einen Beweis von Satz 1.1.40 vgl. [Wero7, V.3.4]. Das nächste Lemma gibt uns ein allgemein gültiges Kriterium für Komplementierbarkeit in Banachräumen an.

Lemma 1.1.41. *Sei A ein abgeschlossener Unterraum von X . (X, A) spaltet genau dann, wenn es eine stetige Projektion auf A gibt. Unter einer stetigen Projektion verstehen wir einen beschränkten surjektiven Operator $P: X \rightarrow A$ mit der Eigenschaft $P^2 = P$. Man schreibt anstelle von P auch pr_A .*

Beweis. „ \Rightarrow “: Angenommen A spaltet. Sei $\Phi: X \rightarrow A \times B$ der Umkehroperator von $A \times B \rightarrow X, (a, b) \mapsto a + b$. Offensichtlich gilt $\forall a \in A$, dass $\Phi(a) = (a, 0)$ ist. Sei $\text{pr}_A: A \times B \rightarrow A$ die kanonische Projektion. Der Operator $P := \text{pr}_A \circ \Phi$ leistet das gewünschte.

„ \Leftarrow “: Angenommen es existiert ein surjektiven Operator $P: X \rightarrow A$ mit $P^2 = P$. Wir zeigen nun mehrere Hilfsbehauptungen. *Behauptung: Aus $P^2 = P$ folgt $P|_A = \mathbb{1}_A$.* Angenommen $a \in A$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $P(x) = a$. Daraus erhält man die Gleichung $P^2(x) = P(a)$. Es ist aber $P^2(x) = P(x)$ also $P(a) = P(x) = a$. Das zeigt die Behauptung. *Behauptung: $\text{Im}(\mathbb{1} - P) = \ker P$.* Die Inklusion „ \subseteq “ folgt aus $P^2 = P$. Die Inklusion „ \supseteq “ folgt aus $P|_A = \mathbb{1}_A$. *Behauptung: Es gilt $A \cap \ker P = 0$.* Sei $a \in A \cap \ker P$. Wegen $a \in A$ gilt $P(a) = a$ und wegen $a \in \ker P$ gilt $P(a) = 0$. Das zeigt $a = 0$. *Behauptung: Es gilt $A + \ker P = X$.* Sei $x \in X$ beliebig. Es ist $x - P(x) \in \text{Im}(\mathbb{1} - P) = \ker P$. Damit gilt $x = P(x) + [x - P(x)] \in (A + \ker P)$. *Behauptung: Es gilt $A \oplus_{\text{top}} \ker P = X$.* Es gilt $A \oplus \ker P = X$ in Sinne der Linearen Algebra. Da A und $\ker P$ abgeschlossene Untervektorräume von X sind, folgt die Behauptung aus Kommentar 1.1.38. \square

Proposition 1.1.42. *Sei X ein Banachraum und $A \subseteq X$ ein Unterraum.*

- (i) *Sei $\dim A < \infty$. Dann ist A abgeschlossen und topologisch komplementierbar.*
- (ii) *Sei A abgeschlossen und $\text{codim } A < \infty$. Dann ist A topologisch komplementierbar.*

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

Zu (i): *Behauptung: A ist abgeschlossen.* Bekanntermaßen ist jeder normierte Vektorraum von endlicher Dimension vollständig. Mit Lemma 1.1.7 folgt die Behauptung. *Behauptung: A ist topologisch komplementierbar.* Wir möchten diese Aussage mithilfe von Lemma 1.1.41 zeigen. Dafür müssen wir uns eine stetige Projektion auf A angeben. Sei (x_1, \dots, x_n) eine Basis von A . Für $i = 1, \dots, n$ wird ein Funktional $\tilde{\lambda}_i: A \rightarrow \mathbb{K}$ durch die Forderung, dass für $j = 1, \dots, n$ die Gleichung $\tilde{\lambda}_i(x_j) = \delta_{ij}$ erfüllt sein soll, eindeutig bestimmt. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz 1.1.27) existiert für alle $i = 1, \dots, n$ ein beschränktes lineares Funktional λ_i mit $\lambda_i|_A = \tilde{\lambda}_i$. Betrachte die Abbildung

$$P: X \rightarrow A, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \cdot x_i.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass P ein surjektiver Operator mit der Eigenschaft $P^2 = P$ ist. Das zeigt die Behauptung.

Zu (ii): Sei $\pi: X \rightarrow X/A$ die kanonische Projektion und sei (x_1, \dots, x_n) eine Familie von Vektoren in X , so dass $(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))$ eine Basis von X/A ist. Setze $B := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Wegen (i) ist B abgeschlossen. *Behauptung: B ist ein algebraisches Komplement von A .* Wenn diese Aussage stimmt, dann folgt (ii) aus Kommentar 1.1.38, da A nach Voraussetzung abgeschlossen ist. *Hilfsbehauptung: $A \cap B = 0$.* Sei $x \in A \cap B$. Wegen $x \in B$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Wegen $x \in A$ ist $\pi(x) = 0$. Da $(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))$ eine Basis von X/A ist, folgt für alle $i = 1, \dots, n$, dass $\lambda_i = 0$ ist. *Hilfsbehauptung: $A + B = X$.* Sei $x \in X$ beliebig. Es gibt eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{K}$, so dass $\pi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(x_i)$ ist. Man rechnet leicht nach, dass

$x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \ker \pi = A$ gilt. Aus

$$x = \left(x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A + B$$

folgt die Behauptung. □

Kommentar 1.1.43. Aus $\dim X/A < \infty$ muss nicht die Abgeschlossenheit von A folgen. Betrachte dazu folgendes Beispiel: Setze $X := \ell^2$ und

$$\tilde{A} := \{(x_n) \in \ell^2 \mid x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Der i -te kanonische Basisvektor von ℓ^2 ist gegeben durch $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$. Bekanntermaßen bildet die Familie $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Hilbertraumbasis von ℓ^2 . Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $e_n \in \tilde{A}$, woraus folgt, dass \tilde{A} dicht in X liegen muss. Mit dem Basisergänzungssatz der Linearen Algebra kann man die Existenz eines Vektorraum $A \subseteq X$ mit $\tilde{A} \subseteq A$ und $\dim X/A < \infty$ zeigen. A kann nicht abgeschlossen sein, da die Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ bereits dicht in X liegt.

Im Hinblick auf unserer Fredholm-Theorie im nächsten Abschnitt möchten wir folgende interessante Proposition zeigen.

Proposition 1.1.44. Sei $T \in L(X, Y)$ und $\dim(Y/\text{Im } T) < \infty$. Dann ist $\text{Im } T$ abgeschlossen. Insbesondere spaltet $(Y, \text{Im } T)$.

Beweis. Wir folgen den Gedanken in [HS71, Lemma 25.6].

Hilfsbehauptung: Wir können o.E. annehmen, dass T injektiv ist. Der Homomorphiesatz (der Linearen Algebra) induziert uns ein \tilde{T} , dass folgendes Diagramm kommutieren lässt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow \tilde{T} \\ & X/\ker T & \end{array}$$

Da die kanonische Projektion $\pi: X \rightarrow X/\ker T$ ein surjektiver beschränkter Operator zwischen Banachräumen ist, folgt mit dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28), dass π offen ist. Damit ist \tilde{T} ein injektiver beschränkter Operator mit $\text{Im } \tilde{T} = \text{Im } T$. Wenn T nicht injektiv ist, dann gehen wir zu \tilde{T} über.

Behauptung: $\text{Im } T$ ist abgeschlossen. Sei $\pi: Y \rightarrow Y/\text{Im } T$ die kanonische Projektion. Nach Voraussetzung existiert eine Familie von Vektoren (y_1, \dots, y_n) aus Y , so dass $(\pi(y_1), \dots, \pi(y_n))$ eine Basis von $Y/\text{Im } T$ ist. Es ist klar, dass die Familie (y_1, \dots, y_n) linear unabhängig ist. Betrachte den Banachraum $X \times \mathbb{K}^n$ (mit der Produkt-Norm $\|(x, v)\| := \|x\|_X + \|v\|_{\mathbb{K}^n}$). Betrachte die lineare Abbildung

$$S: X \times \mathbb{K}^n \rightarrow Y, \quad (x, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \mapsto Tx + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass S ein beschränkter Operator ist. *Behauptung: S ist bijektiv.* Wir zeigen zuerst die Injektivität. Sei $(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \in \ker S$. Dann gilt

$$0 = Tx + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \operatorname{Im} T.$$

Da $(\pi(y_1), \dots, \pi(y_n))$ eine Basis von $Y/\operatorname{Im} T$ ist, folgt, dass für alle $i = 1, \dots, n$ die Koeffizienten $\lambda_i = 0$ sind. Daraus folgt aber $Tx = 0$. Wegen der Injektivität von T folgt nun $x = 0$, was die Injektivität von S zeigt. Wir kommen zur Surjektivität von S . Sei $y \in Y$ beliebig. Da $(\pi(y_1), \dots, \pi(y_n))$ eine Basis ist, gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{K}$, so dass $y - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \operatorname{Im} T$ ist. Damit ist die Surjektivität von S klar.

Mit dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) folgt, dass S ein toplinearer Isomorphismus ist. Zusammen mit der Identität $S(X \times 0) = \operatorname{Im} T$ folgt, dass $\operatorname{Im} T$ abgeschlossen ist.

Dass $\operatorname{Im} T$ in Y spaltet, folgt aus Proposition 1.1.41. \square

Für den Satz vom regulären Wert (der später formuliert und bewiesen wird) ist es vorteilhaft, wenn man außer Lemma 1.1.41 und Proposition 1.1.44 ein weiteres Kriterium zur Verfügung hat.

Lemma 1.1.45. Sei $T \in L(X, Y)$.

(i) Sei T surjektiv. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\ker T$ spaltet.

(b) Es gibt ein $R \in L(Y, X)$ mit $T \circ R = \mathbb{1}_Y$.

(ii) Sei T injektiv. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\operatorname{Im} T$ ist abgeschlossen und spaltet.

(b) Es gibt ein $L \in L(Y, X)$ mit $L \circ T = \mathbb{1}_X$.

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

Zu (i): „(a) \Rightarrow (b)“: Angenommen es gilt $X = \ker T \oplus_{\text{top}} A$. Nach Kommentar 1.1.38 ist A abgeschlossen und mit Lemma 1.1.7 ist A ein Banachraum. Da T surjektiv ist, ist $(T|_A): A \rightarrow Y$ ein bijektiver beschränkter Operator zwischen zwei Banachräumen. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) ist dann $T|_A$ ein toplinearer Isomorphismus. Sei $i_A: A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion. Dann ist $i_A \circ (T|_A)^{-1}$ ein stetiges Rechts-Inverses von T .

„(a) \Leftarrow (b)“: Sei R ein stetiges Rechts-Inverses von T . Es ist nicht schwer zu sehen, dass der Operator

$$P: X \rightarrow \ker T, \quad x \mapsto x - R \circ Tx$$

ein wohldefiniertes Bild besitzt und die Eigenschaft $P|_{\ker T} = \mathbb{1}$ erfüllt. Letzteres impliziert die Surjektivität von P und die Eigenschaft $P^2 = P$. Mit Lemma 1.1.41 folgt die Behauptung.

Zu (ii): „(a) \Rightarrow (b)“: Angenommen $\text{Im } T$ ist abgeschlossen und spaltet in Y . Wegen dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) ist $T: X \rightarrow Y$ ein toplinearer Isomorphismus. Weiterhin existiert nach Lemma 1.1.41 eine stetige Projektion $\text{pr}_{\text{Im } T}: Y \rightarrow \text{Im } T$. Der Operator $T^{-1} \circ \text{pr}_{\text{Im } T}: Y \rightarrow X$ ist ein stetiges Links-Inverse zu T .

„(a) \Leftarrow (b)“: Sei L ein stetige Links-Inverse von T . *Hilfsbehauptung:* $\text{Im } T$ ist abgeschlossen. Sei (Tx_n) eine konvergente Folge mit Limes $y \in Y$. Dann bilden die (x_n) eine Cauchy-Folge denn:

$$\|x_n - x_m\| = \|L \circ T(x_n - x_m)\| \leq c \|Tx_n - Tx_m\|.$$

Der Limes x von (x_n) erfüllt $y = Tx$, was $y \in \text{Im } T$ zeigt. Damit ist die Hilfsbehauptung gezeigt.

Betrachte den beschränkten Operator $T \circ L: Y \rightarrow \text{Im } T$. $T \circ L$ ist surjektiv und es gilt $T \circ L|_{\text{Im } T} = \mathbb{1}_{\text{Im } T}$. $T \circ L$ ist also eine surjektive Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $\text{Im } T$. Mit Lemma 1.1.41 folgt die Behauptung. \square

III. Fredholm-Operatoren

Für diesen Abschnitt seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $F: X \rightarrow Y$ ein beschränkter Operator.

Definition 1.1.46. Wir nennen F einen **Fredholm-Operator**, wenn er folgende drei Bedingung erfüllt:

- (i) $\dim(\ker F) < \infty$.
- (ii) $\text{Im } F$ ist abgeschlossen.
- (iii) $\dim(\text{coker } F) < \infty$.

Die Menge aller Fredholm-Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $F(X, Y)$. Der **Index** von F ist definiert durch

$$\text{index}: F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{index } F := \dim_{\mathbb{K}}(\ker F) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{coker } F).$$

Wir nennen F einen **Semi-Fredholm-Operator**, falls F nur die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Kommentar 1.1.47. In unserer Anwendung wird immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sein.

Nach Proposition 1.1.44 kann man die Bedingung (ii) und (iii) durch $\dim(Y / \text{Im } F) < \infty$ ersetzen.

Beispiel 1.1.48. Sei $\dim X, \dim Y < \infty$. Dann ist F automatisch ein Fredholm-Operator und mit der Dimensionsformel rechnet man nach, dass

$$\text{index } F = \dim X - \dim Y$$

gilt, d.h. der Index hat unabhängig von F immer denselben Wert.

Beispiel 1.1.49. Die Identität $\mathbb{1}: X \rightarrow X$ ist ein Fredholm-Operator. Es ist klar, dass $\text{index } F = 0$ gilt.

Für unendlich-dimensionale Banachräume ist es gar nicht so einfach nicht-triviale Beispiele von Fredholm-Operatoren zu geben. Wir werden in Abschnitt 2.2.I unter großen Aufwand zeigen, dass das Differential einer glatten Abbildung ein Fredholm-Operator ist.

Beim Studium von sogenannten *kompakten Operatoren* tauchen in natürlicher Weise Fredholm-Operatoren auf. Umgekehrt benötigt das Studium von Fredholm-Operatoren Wissen über kompakte Operatoren.

Definition 1.1.50. Wir nennen einen Operator $K: X \rightarrow Y$ einen **kompakten Operator**, falls er eine der folgenden drei äquivalente Definitionen erfüllt:

- (i) Für die Einheitskugel $B_X \subseteq X$ ist die Menge $K(B_X) \subseteq Y$ relativ kompakt, d.h. $\overline{K(B_X)}$ ist kompakt.
- (ii) Beschränkte Mengen werden auf relativ kompakte Mengen abgebildet.
- (iii) Für jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ besitzt $(Kx_n) \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge.

Wir bezeichnen die Menge der kompakten Operatoren mit $K(X, Y)$.

Kommentar 1.1.51. In einem metrischen Raum ist kompakt und folgendkompakt dasselbe. Damit kann man leicht zeigen, dass die obigen Definitionen äquivalent sind.

Weiterhin ist es klar, dass $K(X, Y)$ ein linearer Unterraum von $L(X, Y)$ ist.

Satz 1.1.52. Sei Z ein weiterer Banachraum.

- (i) Kompakte Operatoren sind immer beschränkt.
- (ii) Die Menge $K(X, Y)$ ist abgeschlossen bzgl. der Operatornorm-Topologie von $L(X, Y)$.
- (iii) Sei $L: Y \rightarrow Z$ bzw. $L: Z \rightarrow X$ ein beschränkter Operator. $K(X, Y)$ ist ein zweiseitiges Ideal, d.h. für ein beliebiges $K \in K(X, Y)$ sind die Operatoren $L \circ K$ bzw. $K \circ L$ kompakte Operatoren.
- (iv) Sei $K \in K(X, Y)$. Es bezeichne X', Y' die Dualräume von X, Y und $K' \in L(Y', X')$ die Duale Abbildung von K . Dann ist $K' \in K(Y', X')$.

Beweis. In (i),(ii) und (iii) folgen wir den Gedanken in [Wero7].

Zu (i): Hilfsbehauptung: Eine relativ kompakte Menge in X ist automatisch beschränkt. Sei $A \subseteq Y$ eine relativ kompakte Menge. Es reicht zu zeigen, dass \overline{A} beschränkt ist. Die Familie $(B(0, n))_{n \in \mathbb{N}}$ überdeckt \overline{A} und wegen dessen Kompaktheit gibt es endlich viele $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass $\overline{A} \subseteq B(0, n_1) \cup \dots \cup B(0, n_k)$ gilt. Daraus folgt $\overline{A} \subseteq B(0, \max\{n_1, \dots, n_k\})$, was die Hilfsbehauptung zeigt.

Ein linearer Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkte Mengen auf beschränkt Menge abbildet. Zusammen mit Definition 1.1.50 (ii) folgt damit die Behauptung.

Zu (ii): Wir skizzieren den Beweis. Eine genaue Ausführung findet man in [Wero7, II.3.2]. Sei (K_n) eine konvergente Folge von kompakten Operatoren mit Limes $K \in L(X, Y)$. Zu zeigen ist, dass für eine beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ die Folge (Kx_n) eine konvergente Teilfolge besitzt. Mithilfe eines Diagonalfolgen-Argument kann man eine Teilfolge (x_{n_k}) konstruieren, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(K_i x_{n_k})$ konvergiert. Mit einem einfachen Drei-Epsilon-Argument zeigt man dann, dass die Folge (Kx_{n_k}) eine Cauchy-Folge ist.

Zu (iii): $K \circ L$ ist kompakt, da L beschränkte Folgen auf beschränkte Folgen abbildet. $L \circ K$ ist kompakt, da L konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet.

Zu (iv): Der nächste Beweis stammt vom Autor. Wir erinnern an den Satz von Arzelà-Ascoli:

Sei (S, d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $M \subseteq \mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen von S nach \mathbb{R} mit der Supremums-Norm $\|s\|_{\mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})} := \sup_{y \in S} |s(y)|$ sei. Die Teilmenge M sei beschränkt und gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall s \in M: d(y, x) < \delta \Rightarrow |s(y) - s(x)| < \varepsilon.$$

Dann ist M relativ kompakt. Diese Version stammt von [Wero7, II.3.4].

Wir setzen $S := \overline{K(B_X)} \subseteq Y$ und

$$M := \{\varphi: S \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi = y'|S \text{ für ein } y' \in B_{Y'}\}.$$

Hilfsbehauptung: M ist gleichgradig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Seien $y, \tilde{y} \in S$ mit $\|y - \tilde{y}\|_Y < \delta$ und sei $y'|S \in M$ beliebig, wobei $y' \in B_{Y'}$ sei. Wir rechnen:

$$|y'(y) - y'(\tilde{y})| = |y'(y - \tilde{y})| \leq \|y'\|_{Y'} \cdot \|y - \tilde{y}\|_Y \leq \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon.$$

Das zeigt die Hilfsbehauptung. *Hilfsbehauptung:* M ist beschränkt. Für $y'|S \in M$, wobei $y' \in B_{Y'}$ sei, rechnet man

$$\begin{aligned} \|y'|S\|_{\mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})} &= \sup_{y \in S = \overline{K(B_X)}} |y'(y)| = \sup_{y \in K(B_X)} |y'(y)| = \sup_{x \in B_X} |y' \circ K(x)| = \sup_{x \in B_X} |(K'y')(x)| \\ &= \|K'y'\|_{X'}. \end{aligned} \quad (*)$$

Jedes Element in M ist wegen Gleichung (*) durch $\|K'\|_{L(Y',X')}$ beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist die Menge M relativ kompakt.

Behauptung: $K'(B_{Y'})$ ist relativ folgenkompakt. Sei $(K'y'_n)$ eine beliebige Folge. Betrachte die Folge $(y'_n|_S) \subseteq M$. Da M relativ kompakt ist, können wir o.E. $(y'_n|_S)$ als eine $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0(S,\mathbb{R})}$ -konvergente Folge annehmen. $(y'_n|_S)$ ist insbesondere eine Cauchy-Folge. Wegen Gleichung (*) und der Linearität von K' sieht man, dass auch $(K'y'_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Da Y vollständig ist, zeigt das die Behauptung. \square

In Definition 1.1.46 soll der Begriff Semi-Fredholm-Operator nur als technisches Hilfsmittel verstanden werden. Wenn man zeigen möchte, dass F ein Fredholm-Operator ist, dann ist es eine gängige Technik zuerst zu zeigen, dass er Semi-Fredholm ist. Für die letztere Eigenschaft gibt es ein nützliches

Lemma 1.1.53 (Semi-Fredholm-Lemma). Seien X, Y, Z Banachräume und $F \in L(X, Y)$ und $K \in K(X, Z)$ ein kompakter Operator und es existiere ein $c > 0$ mit

$$\|x\|_X \leq c(\|Fx\|_Y + \|Kx\|_Z), \quad \text{für alle } x \in X. \quad (*)$$

Dann ist F ein Semi-Fredholm-Operator.

Kommentar 1.1.54. Die nicht-triviale Aussage des Semi-Fredholm-Lemmas ist die Folgerung, dass $\text{Im } F$ abgeschlossen ist.

Beweis von Lemma 1.1.53. Wir folgen den Gedanken in [MS04, A.1.1].

Behauptung: $\ker F$ ist endlich-dimensional. Ein Banachraum ist genau dann endlich-dimensional, wenn seine Einheitskugel kompakt ist, vgl. [Wero7, I.2.7]. Sei $(x_n) \subseteq \ker F$ eine Folge mit $\|x_n\| \leq 1$. Weil K ein kompakter Operator und $(x_n) \subseteq \ker F$ ist, sieht man mit (*) leicht, dass (x_n) eine Cauchy-Teilfolge besitzt. Damit ist die Einheitskugel von $\ker F$ kompakt.

Behauptung: $\text{Im } F$ ist abgeschlossen. Sei $(F(x_n)) \subseteq \text{Im } F$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $y \in Y$.

1.Fall: Angenommen (x_n) ist beschränkt. Dann besitzt (Kx_n) eine konvergente Teilfolge (Kx_{n_k}) . Mit Gleichung (*) folgt, dass dann (x_{n_k}) eine Cauchy-Folge ist, d.h. $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Damit gilt $F(x_0) = y$, d.h. $y \in \text{Im } F$.

2.Fall: Angenommen (x_n) ist unbeschränkt. Wir führen diese Behauptung zum Widerspruch. Da $\dim(\ker F) < \infty$ ist, existiert ein abgeschlossenes $A \subseteq X$ mit $\ker F \oplus_{\text{top}} A = X$ (vgl. Proposition 1.1.42). Wir können annehmen, dass $(x_n) \subseteq A$ ist. Weiterhin können wir annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$ ist. Gehe nun zu einer normierten Teilfolge $(\tilde{x}_n) := (x_n/\|x_n\|)$ über. Wie in Fall 1 dürfen wir $(K\tilde{x}_n)$ als konvergent voraussetzen. Da wir nach Voraussetzung $(F\tilde{x}_n)$ als konvergent und (\tilde{x}_n) als unbeschränkt annehmen, gilt $F\tilde{x}_n \rightarrow 0$. Das zusammen mit Gleichung (*) impliziert, dass (\tilde{x}_n) eine Cauchy-Folge ist. Für den Grenzwert $\tilde{x}_0 \in A$ gilt $\|\tilde{x}_0\| = 1$, aber $F\tilde{x}_0 = 0$. Damit gilt aber $A \cap \ker F \neq \emptyset$. Widerspruch! \square

Alle wichtigen Eigenschaften über den Index von Fredholm-Operatoren fassen wir im nächsten Satz zusammen.

Satz 1.1.55. Seien X, Y, Z Banachräume.

- (i) Fredholm-Operatoren sind stabil unter kleinen Störungen, d.h. für $F \in F(X, Y) \exists \varepsilon = \varepsilon(F) > 0 \forall L \in L(X, Y)$ mit $\|L\| < \varepsilon$ gilt $F + L \in F(X, Y)$ und

$$\text{index}(F + L) = \text{index } F.$$

Für alle $K \in K(X, Y)$ ist $F + K \in F(X, Y)$ und es gilt

$$\text{index}(F + K) = \text{index } F.$$

Insbesondere gilt $F(X, Y) \subseteq_o L(X, Y)$ und die Abbildung $\text{index}: F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig.

- (ii) Für $G \in F(X, Y)$ und $F \in F(Y, Z)$ ist $F \circ G \in F(X, Z)$ und es gilt die **Index (Kompositions-) Regel** bzw. die **Index Formel**

$$\text{index}(F \circ G) = \text{index } F + \text{index } G,$$

d.h. im Falle von Endomorphismen kann man $\text{index}: F(X, X) \rightarrow \mathbb{Z}$ als einen (Monoid-) Homomorphismus auffassen.

Für den obigen Satz findet man Beweise (teilweise als Übungsaufgaben gestellt) im Anhang von [MS04]. Das nächste Lemma baut nicht auf die vorherige Theorie auf und passt thematisch eher zum vorherigen Abschnitt. Es setzt aber die Definition von Fredholm-Operatoren voraus.

Lemma 1.1.56. Seien E, F, G Banachräume, $\Phi_1 \in L(E, G)$ und $\Phi_2 \in F(F, G)$. Dann gilt für den beschränkten Operator

$$\Phi: E \times F \rightarrow G, \quad (e, f) \mapsto \Phi_1 e + \Phi_2 f,$$

dass sein Kern in $E \times F$ spaltet.

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

1.Fall: Φ_2 ist bijektiv. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) ist Φ_2 ein toplinearer Isomorphismus. Definiere $P: E \times F \rightarrow E \times F$, $P(e, f) = (e, -\Phi_2^{-1}\Phi_1 e)$. Man sieht sofort, dass P eine stetige Projektion auf den Kern von Φ ist. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.1.41.

2.Fall: Φ_2 ist surjektiv. Wir führen das auf den ersten Fall zurück. Da Φ_2 ein Fredholm-Operator ist, existiert ein abgeschlossener Unterraum $A_0 \subseteq F$ mit

$$\ker \Phi_2 \oplus_{\text{top}} A_0 = F.$$

Der Operator $\Phi_2|_{A_0}: A_0 \rightarrow G$ ist ein toplinearer Isomorphismus. Betrachte den beschränkten Operator

$$\tilde{\Phi}: E \times A_0 \rightarrow G, \quad \tilde{\Phi}(e, f) = \Phi(e, f) = \Phi_1 e + (\Phi_2|_{A_0})f.$$

Wegen Fall 1, ist der Unterraum $\ker \tilde{\Phi} \subseteq E \times A_0$ komplementierbar. Es gilt nun

$$E \times F = E \times (A_0 \oplus_{\text{top}} \ker \Phi_2) = (E \times A_0) \oplus_{\text{top}} (0 \times \ker \Phi_2).$$

Damit erhalten wir sofort

$$\ker \Phi = \ker \tilde{\Phi} \oplus_{\text{top}} (0 \times \ker \Phi_2)$$

und wir erhalten eine stetige Projektion auf den Kern durch

$$\text{pr}_{\ker \Phi} = \text{pr}_{\ker \tilde{\Phi}} \circ \text{pr}_{E \times A_0} + \text{pr}_{0 \times \ker \Phi_2}.$$

Jetzt können wir den *allgemeinen Fall* zeigen. Da Φ_2 Fredholm ist können wir das Bild komplementieren, d.h. es gibt ein abgeschlossenes $A_1 \subseteq G$ mit $\dim A_1 < \infty$ und

$$\text{Im } \Phi_2 \oplus_{\text{top}} A_1 = G.$$

Betrachte den stetigen Operator $\hat{\Phi} := P_{\text{Im } \Phi_2} \circ \Phi: E \times F \rightarrow \text{Im } \Phi_2$. Wir können den zweiten Fall anwenden und wissen, dass $\ker \hat{\Phi}$ komplementierbar in $E \times F$ ist. Betrachte nun

$$\Phi|_{\ker \hat{\Phi}}: \ker \hat{\Phi} \rightarrow G.$$

Es ist $\text{Im}(\Phi|_{\ker \hat{\Phi}}) \subseteq A_1$, denn für $(e, f) \in \ker \hat{\Phi}$ mit $\Phi(e, f) = g$ gilt

$$P_{\text{Im } \Phi_2} g = P_{\text{Im } \Phi_2} \circ \Phi(e, f) = \hat{\Phi}(e, f) = 0.$$

Damit gilt aber $\ker \hat{\Phi} / \ker \Phi \cong \text{Im}(\Phi|_{\ker \hat{\Phi}}) \subseteq A_1$, d.h. $\ker \hat{\Phi} / \ker \Phi$ ist endlichdimensional und nach Korollar 1.1.42 (ii) ist $\ker \Phi$ in $\ker \hat{\Phi}$ komplementierbar. Damit ist $\ker \Phi$ auch in $E \times F$ komplementierbar. \square

1.2. Nichtlineare Funktionalanalysis

In diesen Abschnitt betreiben wir keine tief liegende nichtlineare Funktionalanalysis. Es werden lediglich die Begrifflichkeiten eingeführt, um Differentialgeometrie auf unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten betreiben zu können.

Damit die Theorie aus mathematischer Sicht „richtig“ aufgebaut wird, müssten wir ab jetzt den Begriff des Banachraums fallen lassen und nur noch von **vollständig normierbaren topologischen Vektorräumen** sprechen, vgl. Definition 1.1.8. Darunter verstehen wir topologische Vektorräume, deren Topologie von einer Norm kommt, mit der dieser Vektorraum zum Banachraum wird. Im Buch von Lang [Lan99] spricht man von **banachable topological vectorspaces**.

I. Das Fréchet-Differential und der Satz über implizite Funktionen

Für diesen Abschnitt seien X, Y vollständig normierbare topologische Vektorräume.

Wir möchten den endlich-dimensionalen Begriff einer glatten Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ für vollständig normierbare topologische Vektorräume verallgemeinern. Dafür müssen wir zuerst einmal das Differential von f klären. Das läuft in der Literatur unter den Namen „Fréchet-Differential“. Wir wiederholen das Landau-Symbol.

Definition 1.2.1. Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(0) = 0 = g(0)$. Wir sagen, dass g **asymptotisch in 0 gegenüber f vernachlässigbar** ist, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

ist. Wir schreiben dann $g(h) = o(f(h))$ bzw. $g = o(f)$. o bezeichnen wir als das (kleine) **Landau-Symbol**.

Definition 1.2.2. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $U \subseteq_o X$. Eine Abbildung $f: U \rightarrow Y$ heißt in $x \in U$ **Fréchet-differenzierbar** (kurz: differenzierbar), wenn es ein $T = T(x) \in L(X, Y)$ gibt (T darf von x abhängen), so dass für alle $h \in X$ klein genug gilt

$$\|f(x+h) - f(x) - Th\|_Y = o(\|h\|_X).$$

T ist notwendigerweise eindeutig bestimmt und man schreibt $T = df(x)$ und nennt es das **Differential** oder die Linearisierung von f in x .

Kommentar 1.2.3. Wegen Korollar 1.1.16 kann man Definition 1.2.2 nehmen, um Fréchet-Differenzierbarkeit für vollständig normierbare topologische Vektorräume zu klären. Wir möchten aber trotzdem eine „normfreie“ Definition der Fréchet-Differenzierbarkeit angeben.

Definition 1.2.4. Sei $\varphi: X \rightarrow Y$ ein Abbildung und $\mathbb{R}_{>0} := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Weiterhin bezeichne $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität. Wir sagen φ **ist tangential zu 0**, falls es eine Abbildung $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $r = o(t)$ gibt, so dass $\forall W = W(0) \subseteq_o Y \exists V = V(0) \subseteq_o X$ und $t_0 > 0$, so dass $\forall |t| \leq t_0$ die Inklusion

$$\varphi(t\overline{V}) \subseteq r(t)\overline{W}$$

gilt.

Die nächste Proposition hilft zum Verständnis der obigen Definition.

Proposition 1.2.5. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $\varphi: X \rightarrow Y$ ein Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) φ ist tangential zu 0.

(ii) Es gibt ein $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in X$ mit $\|x\| \leq \delta$ gilt

$$\|\varphi(x)\|_Y \leq \|x\|_X \cdot \psi(x).$$

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

„(i) \Rightarrow (ii)“: Sei φ tangential zu 0. Dann gibt es ein $r = o(t)$. Zu $W = B_1(0) \subseteq_o Y$ gibt es ein $V = V(0) \subseteq_o X$ und $t_0 > 0$, wobei wir o.E. annehmen, dass $V = B_{\tilde{\delta}}(0)$ für ein $\tilde{\delta} > 0$ sei. Setze $\delta := t_0 \cdot \tilde{\delta}$. Für alle $\|x\|_X \leq \delta$ gilt nun

$$\|\varphi(x)\|_Y = \left\| \varphi \left(\underbrace{\frac{\|x\|_X}{\tilde{\delta}}}_{\leq t_0} \underbrace{\tilde{\delta} \frac{x}{\|x\|_X}}_{\in B_{\tilde{\delta}}(0)} \right) \right\|_Y \stackrel{\varphi(tW) \subseteq r(t)V}{\leq} r \left(\frac{\|x\|_X}{\tilde{\delta}} \right) = \|x\|_X \underbrace{\frac{\frac{1}{\tilde{\delta}} \cdot r \left(\frac{\|x\|_X}{\tilde{\delta}} \right)}{\frac{\|x\|_X}{\tilde{\delta}}}}_{=: \psi(x)},$$

was die Behauptung zeigt.

„(i) \Leftarrow (ii)“: Aus $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$ folgt, dass es ein $\varrho > 0$ geben muss, so dass $\sup_{x \in B_{\varrho}(0)} \psi(x) < \infty$ ist. \square

Definition 1.2.6. Seien X, Y Banachräume und $U \subseteq_o X$. Wir sagen, dass $f: U \rightarrow Y$ in $x \in U$ Fréchet-differenzierbar ist, wenn es ein $T = T(x) \in L(X, Y)$ und ein $\varphi: X \rightarrow Y$ tangential zu 0 gibt, so dass für alle h klein genug gilt:

$$f(x+h) = f(x) + Th + \varphi(h).$$

Damit haben wir eine „normfreie“ Definition der Fréchet-Differenzierbarkeit. Als nächsten möchten wir glatte Abbildungen definieren. Wir präsentieren nun zwei verschiedene Definitionen.

Definition 1.2.7. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $U \subseteq_o X$ und $f: U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Falls f in allen Punkte $x \in U$ differenzierbar ist und die **Differential-Abbildung** $df: U \rightarrow L(X, Y)$ stetig ist, dann bezeichnen wir f als **stetig differenzierbar** oder als \mathcal{C}^1 -Abbildung. Iterativ definieren wir das **k-te Differential** in x durch $d(d^{k-1}f)(x)$ und fassen es via der kanonischen Isomorphie von Gleichung (*) aus Kommentar 1.1.34 als eine k -fachen beschränkten Operator auf. Analog sagen wir, dass f **k-fach stetig differenzierbar** oder eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist, falls f eine \mathcal{C}^{k-1} -Abbildung ist und die Abbildung $d^{k-1}f: U \rightarrow L^k(X, Y)$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist. Die Menge aller k -fachen stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^k(U, Y)$.

Wir nennen $f: U \rightarrow Y$ **glatt**, falls $f \in \mathcal{C}^k(U, Y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Motivation. In der Definition 1.2.7 haben wir das Differential iterativ definiert und setzen somit die Gleichung (*) aus Kommentar 1.1.34 beim Leser voraus. Generell

möchten man den Begriff *glatte Abbildung* schneller definieren. Deshalb möchten wir eine andere Definition vorstellen, die man übrigens auch im endlich-dimensionalen Fall nehmen könnte, bei der wir den Satz von Taylor gewissermaßen als Definition nehmen.

Definition 1.2.8. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $U \subseteq_o X$ und $f: U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für ein $\nu \in \mathbb{N}$ und $h \in X$ bezeichne h^ν das Tupel (h, \dots, h) , wobei das h in den Tupel ν -fach auftritt. Wir sagen, dass f k -Fréchet-differenzierbar (kurz: k -differenzierbar) in $x \in X$ ist, wenn es multilineare beschränkte Operatoren T_1, \dots, T_k gibt, wobei $T_\nu \in L^\nu(X, Y)$ sei, so dass für alle $h \in X$ klein genug gilt

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} T_\nu x^\nu + o(\|h\|^{k+1}).$$

T_ν ist dann bereits eindeutig bestimmt und wir schreiben dann $T_\nu = d^\nu f(x)$ und nennen es das ν -te Fréchet-Differential von f in x . Wir sagen, dass f eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist, wenn f in jedem Punkt k -differenzierbar ist. Wir nennen f **glat**, wenn f für alle $k \in \mathbb{N}$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist.

Für eine glatte Abbildung f nennen wir die Abbildung

$$d^\nu: U \rightarrow L^\nu(X, Y), \quad x \mapsto d^\nu f(x)$$

eine ν -Form.

Kommentar 1.2.9. Definition 1.2.8 kann man sogar nehmen um mit den Fall $k=0$ die Stetigkeit von f in x zu erklären. Es ist nämlich klar, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig in x ist, wenn für alle $h \in X$

$$f(x+h) = f(x) + o(1)$$

gilt.

Weiterhin ist es klar, dass Definition 1.2.7 und 1.2.8 äquivalent sind.

Wir bringen ein einfaches Beispiele um zu zeigen, mit was für Fréchet-differenzierbaren Abbildungen wir arbeiten werden.

Beispiel 1.2.10. Für $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ betrachte den Banachraum $(\mathcal{C}^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ betrachte die induzierte Abbildung

$$f_*: \mathcal{C}^0([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}^0([a, b]), \quad x \mapsto f \circ x.$$

Man kann zeigen, dass f_* stetig Fréchet-differenzierbar ist mit Differential

$$d(f_*)_x h = (f')_*(x) \cdot h,$$

wobei $x, h \in \mathcal{C}^0([a, b])$ sei. Wenn wir die Notation oben vereinfachen, dann haben wir

$$d(f_*) = (df)_*,$$

d.h. d und $*$ kommutieren miteinander. Damit haben wir einen kovarianten Funktor

$$*: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1\left(\mathcal{C}^0([a, b]), \mathcal{C}^0([a, b])\right)$$

definiert, der sogar mit der Ableitung verträglich ist.

Wir skizzieren den Beweis: Indem man den Mittelwertsatz auf f anwendet kann man folgende Ungleichung (ohne große Mühe) zeigen:

$$\|f_*(x+h) - f_*(x) - d(f_*)_x h\|_\infty \leq \sup_{t \in [a, b]} \left(\sup_{\xi \in [x(t)-|h(t)|, x(t)+|h(t)|]} f'(\xi) - f'(x(t)) \right) \cdot \|h\|_\infty.$$

Man muss dann nur noch zeigen, dass die rechte Seite der Ungleichung ohne den Faktor $\|h\|_\infty$ gegen 0 geht für $\|h\|_\infty \rightarrow 0$. Dazu reicht es die gleichmäßige Stetigkeit von f' auf einen geeigneten kompakten Intervall zu benutzen.

Analog kann man zeigen, dass wenn f eine \mathcal{C}^k -Abbildung, dann f_* eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist mit $d^k f_* = (f^{(k)})_*$.

Wir bringen noch ein Beispiel um anzudeuten, dass es auch Fréchet-analytische Abbildungen gibt (für eine genau Definition dieses Begriffs vgl. [Dou66, §1]).

Beispiel 1.2.11. Die Menge der toplinearen Isomorphismen, $GL(X)$, ist eine offene Teilmenge von $L(X, X)$. Man kann zeigen, dass die inverse Abbildung

$$f: GL(X) \rightarrow L(X, X), \quad u \mapsto u^{-1}$$

eine glatte Abbildung ist. Da $GL(X)$ offen ist, gibt es für einen Punkt $u_0 \in GL(X)$ ein $\varepsilon > 0$, so dass der Ball um u_0 mit Radius ε ganz in $GL(X)$ enthalten ist. Weiterhin gilt dann für alle u mit $\|u - u_0\| < \varepsilon$ die Identität

$$(u_0 + u)^{-1} = u^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (hu^{-1})^n.$$

Das folgert man leicht mithilfe der Neumann-Reihe (d.h. die geometrische Reihe für Operatoren). Mit der Definition 1.2.8 sieht man, dass die inverse Abbildung k -differenzierbar ist $\forall k \in \mathbb{N}$. Damit ist sie glatt.

Kommentar 1.2.12. Die Definition von Fréchet-Differenzierbarkeit erinnert stark an die klassische Definition von Differenzierbarkeit und stellt tatsächlich eine Verallgemeinerung dieser dar. Dass das möglich ist deutet der Autor wie folgt: Man hat in der langen Entwicklung der Analysis gewissermaßen nun den „richtigen“ Begriff von Differenzierbarkeit gefunden.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die differenzierbaren Abbildungen zwischen Frécheträumen (werden hier nicht eingeführt) nicht durch Definition 1.2.2 erklären werden können. Dort muss man sich damit begnügen, dass man nur Richtungsableitungen definieren kann.

Kommentar 1.2.13. Einige Sätze über differenzierbare Abbildungen samt Beweise lassen sich von der klassische Analysis problemlos übertragen. Z.B. ist die Kettenregel und die Rechenregel für das Ableiten von multilinearen Abbildungen richtig (die üblichen Beweise gehen einfach durch). Da der **Banachfixpunktsatz** auch für Banachräume gilt, kann man auch den **inversen Funktionensatz** und damit auch den **Satz über implizite Funktionen** beweisen.

Definition 1.2.14. Seien X_1, \dots, X_k, Y Banachräume, $U \subseteq_o X_1 \times \dots \times X_k$ und $x \in U$ mit $x = (x_1, \dots, x_k)$. Für eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $f: U \rightarrow Y$ definieren wir das **j -te partielle Differential** $d_{X_j}f(x)$ bzw. $d_jf(x)$ für $1 \leq j \leq k$ durch

$$d_jf(x)h_j = df(x)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \quad \text{für } h_j \in X_j.$$

Theorem 1.2.15 (Satz über implizite Funktionen). Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq_o X \times Y$ und $f: U \rightarrow Z$ eine \mathcal{C}^p -Abbildung, mit $1 \leq p \leq \infty$. Sei weiterhin $(x, y) \in U$ mit $f(x, y) = 0$ und $d_Yf(x, y): Y \rightarrow Z$ ein toplinearer Isomorphismus. Dann existiert $V = V(x) \subseteq_o X$, $W = W(y) \subseteq_o Y$ und eine \mathcal{C}^p -Abbildung $g: V \rightarrow W$ mit

$$f(x', y') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x') = y' \quad \forall (x', y') \in V \times W.$$

Für einen Beweis vgl. [Lan99, §I.5.9] oder [MS04, A.3.3] (der übliche Beweis geht hier durch). Wir werden den inversen Funktionensatz als Korollar beweisen. Da in den soeben genannten Quellen der Satz über implizite Funktionen mit Hilfe des Inversen Funktionensatz bewiesen wird, bedeutet das, dass beide Sätze äquivalent sind.

Korollar 1.2.16 (Inverser Funktionensatz). Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq_o X$, $f: U \rightarrow Y$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung, für $1 \leq k \leq \infty$. In $x_0 \in U$ sei $df(x_0): X \rightarrow Y$ ein toplinearer Isomorphismus. Dann ist f um x_0 ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, d.h. es existiert ein $V = V(x_0) \subseteq_o U$, so dass $W := f(V) \subseteq_o Y$ und $f|_V: V \rightarrow W$ ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus ist.

Beweis. Indem wir notfalls zu $\tilde{f}(x) := (df(x_0))^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))$ übergehen, dürfen wir annehmen, dass $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ und $X = Y$ ist. Betrachte die Abbildung $F: X \times U \rightarrow X$, $(y, x) \mapsto -y + f(x)$. Offensichtlich ist $d_2F(0, 0) = df(0)$ invertierbar und $F(0, 0) = 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es $W = W(0) \subseteq_o X$, $V = V(0) \subseteq_o U$ und eine \mathcal{C}^k -Abbildung $g: W \rightarrow V$, so dass für alle $(y, x) \in W \times V$ gilt $F(y, x) = 0 \Leftrightarrow g(y) = x$. g ist dann die gesuchte Umkehrabbildung. \square

Wir benötigen später noch folgendes einfache

Korollar 1.2.17. Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq_o X$ und $f: U \rightarrow Y$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung und für alle $p \in U$ sei $df_p: X \rightarrow Y$ Isomorphismus. Dann ist für alle $V \subseteq_o U$ die Menge $f(V)$ offen in Y .

Beweis. Sei $p \in V$ beliebig. Dann existiert nach dem Inversen Funktionensatz ein $\tilde{V}_p = \tilde{V}_p(p) \subseteq_o V$, so dass $f|_{\tilde{V}_p}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Menge von Y ist. Insbesondere gilt

$$f(V) = \bigcup_{p \in V} (f|_{\tilde{V}_p})(\tilde{V}_p) \subseteq_o Y. \quad \square$$

Der Satz über implizite Funktionen lässt sich genau so wie in der endlich-dimensionalen Kategorie formulieren und beweisen. Allerdings haben wir in Abschnitt 1.1.II gelernt, dass die Voraussetzung ein Banachraum von Typ $X \times Y$ zu haben, nicht so selbstverständlich ist, wie man auf den ersten Blick glauben würde.

II. Der Satz von Sard-Smale

Definition 1.2.18. Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq_o X$ und $f: U \rightarrow Y$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Wir nennen $p \in U$ einen **singulären Punkt** von f , falls df_p nicht surjektiv ist. Ein **regulärer Punkt** von f ist ein nicht-singulärer Punkt von f . Wir nennen $q \in Y$ einen **singulären Wert** von f , wenn ein singulärer Punkt $p \in f^{-1}(q)$ von f existiert. Ein **regulärer Wert** von f ist ein nicht-singulärer Wert von f .

Wir erinnern an den klassischen Satz von Sard:

Theorem 1.2.19 (Satz von Sard). Sei $U \subseteq_o \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung wobei $k > \max(n - m, 0)$ sein soll. Dann hat die Menge der kritischen Werte in \mathbb{R}^m das Lebesgue-Maß 0.

Wir möchten den obigen Satz in der Kategorie der Banachräume formulieren. Als erstes müssen wir dafür das Analogon des Lebesguemaßes auf dem \mathbb{R}^n klären.

Definition 1.2.20. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

- (a) M heißt **nirgends dicht**, wenn der Abschluss \overline{M} keine inneren Punkte besitzt.
- (b) M ist von **1. Baire Kategorie**, wenn es eine Folge (M_n) nirgends dichter Mengen in X gibt mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.
- (c) M ist von **2. Baire Kategorie**, wenn M nicht von 1. Baire Kategorie ist.

Wir sagen eine, dass eine Eigenschaft für **fast alle** $x \in X$ gilt, wenn es eine Ausnahmemenge der 1. Baire Kategorie gibt.²

²Im Anhang A.1 werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Lebesgue-Nullmengen und Mengen der 1. Kategorie ausführlicher diskutiert.

Wir können nicht hoffen, dass der Satz von Sard in der Kategorie der Banachräume für beliebigen \mathcal{C}^k -Abbildungen richtig ist. In einem Artikel von Ivan Kupka [Kup65] wurde eine glatte Funktion $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem separablen³ Hilbertraum H konstruiert mit der Eigenschaft, dass $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ kritische Werte von f sind.

Stephen Smale erkannte, dass man noch eine weitere Anforderungen an f stellen muss, um den Satz von Sard verallgemeinern zu können.

Definition 1.2.21. Seien X, Y Banachräume und $U \subseteq_o X$. Wir nennen eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $f: U \rightarrow Y$ eine **Fredholm-Abbildung**, wenn das Differential df_x für alle $x \in U$ ein Fredholm-Operator ist. Wir definiert den **Index von f** im Punkt $x \in U$ durch seine Linearisierung, d.h.

$$\text{index } f(x) := \text{index } df_x \quad \text{für ein } x \in U.$$

Kommentar 1.2.22. Da $\text{index}: F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung ist (vgl. Satz 1.1.55), ist der Index einer Fredholm-Abbildung $f: U \rightarrow Y$

$$\text{index } f: U \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \text{index } f(x)$$

lokal konstant und damit stetig.

Theorem 1.2.23 (Satz von Sard-Smale). Seien X, Y separable Banachräume, $U \subseteq_o X$ und $f: U \rightarrow Y$ eine \mathcal{C}^k -Fredholm-Abbildung mit $k > \max\{\text{index } f, 0\}$. Dann sind fast alle Punkte in Y reguläre Werte von f .

Einen Beweis findet man in [Sma65] bzw. ein wenig überarbeitet in [MS04].

1.3. Geometrie von unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Begriffe Mannigfaltigkeit (mit Rand), Untermannigfaltigkeit, Tangentialraum und Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten, die lokal auf Banachräume modelliert sind. Wir werden in diesem Kontext den Satz vom regulären Wert formulieren und beweisen. Abschließend werden wir den Zusammenhang definieren und mit diesen eine Spaltung des doppelten Tangentialbündel angeben.

I. Banach- und Hilbert-Mannigfaltigkeiten

Für diesen Abschnitt meinen wir mit *Banachraum* einen *vollständig normierbaren topologischen Vektorraum* und mit *Hilbertraum* einen *hilbertisierbaren topologischen Vektorraum*. Sei weiterhin B ein Banachraum und H ein Hilbertraum über dem Körper \mathbb{R} .

³Wir nennen einen Banachraum separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Definition 1.3.1. Sei M ein topologischer Raum. Wir nennen (U, φ) eine **Karte** von M , wenn folgende Bedingungen gelten:

- (a) $U \subseteq_o M$.
- (b) Es gibt einen Banachraum B_φ , so dass

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq_o B_\varphi$$

ein Homöomorphismus ist.

Sei I eine Indexmenge. Wir nennen $\mathfrak{A} := (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ einen **glatten Atlas** von M , wenn folgende Bedingungen gelten:

- (i) Für alle $i \in I$ ist (U_i, φ_i) eine Karte von M .
- (ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (iii) Für alle $i, j \in I$ ist die Abbildung

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

eine glatter Fréchet-Diffeomorphismus zwischen den offene Teilmengen $B_j := B(\varphi_j)$ und $B_i := B(\varphi_i)$.

Wir nennen eine Karte (U, φ) **kompatibel** zum Atlas \mathfrak{A} , wenn die Familie $(U, \varphi) \cup \mathfrak{A}$ immer noch ein Atlas ist. Zwei Atlanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen **kompatibel**, wenn jedes Mitglied aus \mathfrak{A} kompatibel mit \mathfrak{B} ist. Das definiert einer Äquivalenzrelation zwischen Atlanten und wir bezeichnen eine Klasse mit c . Das Tupel (M, c) heißt **glatte Mannigfaltigkeit modelliert auf Banachräumen** oder **Banach-Mannigfaltigkeit**. Wir nennen (M, c) eine **Hilbert Mannigfaltigkeit**, wenn es einen Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} \in c$ gibt, so dass alle B_i Hilberträume sind.

Für den Rest dieser Arbeit unterdrücken wir die Äquivalenzklasse c und sagen nur noch, dass M eine Banach-Mannigfaltigkeit ist. Für den Rest dieser Arbeit meinen wir mit „ (U, φ) sei eine Karte von M “, dass (U, φ) kompatibel mit einem Atlas von M sei. Für den Rest dieses Abschnitt sei M eine Banach-Mannigfaltigkeit.

Kommentar 1.3.2. Falls für ein Paar $(i, j) \in I \times I$, wo I die Indexmenge eines Atlas ist, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt, dann muss $B_i \cong B_j$ sein, da für $p \in U_i \cap U_j$ das Differential $d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi(p)}: B_j \rightarrow B_i$ ein toplinearer Isomorphismus ist.

Damit kann man jedem Punkt $p \in M$ eine eindeutige Isomorphieklasse von Banachräumen zuordnen. Bezeichne diese Klasse mit $[B]_p$. Betrachte die Menge

$$M_p := \{q \in M \mid [B]_q = [B]_p\}.$$

Es ist klar, dass diese Teilmenge offen ist, und dass $\mathbb{C}M_p$ ebenfalls offen ist. Wenn M zusammenhängend ist, dann können wir M einen Banachraum \mathbf{B} zuordnen, so dass für alle $p \in M$ der Raum \mathbf{B} in $[\mathbf{B}]_p$ enthalten ist. Wir sagen dann, dass M auf \mathbf{B} modelliert ist.

Wenn M nicht zusammenhängend ist und $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ die Zusammenhangskomponenten von M sind, dann können wir für jedes $\alpha \in A$ einen Banachraum \mathbf{B}_α finden, so dass M_α auf \mathbf{B}_α modelliert ist. Allerdings kann es sein, dass für ein Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ die Banachräume $\mathbf{B}_\alpha, \mathbf{B}_\beta$ isomorph sind. Wir möchten deshalb für M eine Familie von Banachräumen angeben, die möglichst klein ist. Das motiviert die nächste

Definition 1.3.3. Sei J eine Indexmenge und für alle $j \in J$ seien \mathbf{B}_j Banachräume, die paarweise nicht isomorph sind. Setze $\mathbf{B} := (\mathbf{B}_j)_{j \in J}$. Wir sagen, dass M eine \mathbf{B} -Mannigfaltigkeit ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für jedes $j \in J$ gibt es ein $p \in M$, so dass \mathbf{B}_j in der Isomorphieklasse $[\mathbf{B}]_p$ enthalten ist.
- (ii) Für jedes $p \in M$ gibt es ein $j \in J$, so dass \mathbf{B}_j in der Isomorphieklasse $[\mathbf{B}]_p$ enthalten ist.

Wir nennen dann \mathbf{B} eine Familie von **Modellräumen** von M bzw. wir sagen, dass M auf \mathbf{B} modelliert ist.

Kommentar 1.3.4. Es ist nicht intuitiv zu fordern, dass M mehr als nur einen Modellraum besitzen soll. Es gibt aber tatsächlich Beispiele, wo es sinnvoll ist, mehr als einen Modellraum zuzulassen. Z.B. wurde in der Dissertation von Adrien Douady [Dou66] folgender Satz gezeigt:

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und sei M die Menge aller kompakten komplexen Untermannigfaltigkeiten von X . Dann trägt M die Struktur einer analytischen Banach-Mannigfaltigkeit (modelliert auf Banachräume über \mathbb{C}).

Man kann zeigen, dass diese Banach-Mannigfaltigkeit mehr als einen Modellraum besitzt (ohne Beweis).

Kommentar 1.3.5. Es ist nicht schwer sich eine Definition einer *topologischen Banach-Mannigfaltigkeit* zu überlegen. Für topologische \mathbf{B} -Mannigfaltigkeiten kann man so etwas wie den Einbettungssatz von Whitney formulieren. In einem Artikel von David Henderson [Hen69] wurde folgendes Theorem gezeigt:

Sei M ein metrischer Raum. Wenn M eine separable topologische unendlich-dimensionale Banach-Mannigfaltigkeit ist, welche auf einem Hilbertraum \mathbf{H} modelliert ist, dann kann man M als eine offene Teilmenge von \mathbf{H} einbetten.

Man sollte an dieser Stelle anmerken, dass man hier unter einer Einbettung eine injektive stetige Abbildung versteht, welche eine Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

In einem Artikel von J. Eells und K. D. Elworthy [EE70] wurde ein \mathcal{C}^∞ -Analogon von der obigen Aussage gezeigt:

Sei E ein unendlich-dimensionaler \mathcal{C}^∞ -glatter Banachraum (darunter versteht man einen Banachraum, dessen Topologie von einer Norm induziert wird, die in jedem Punkt ungleich dem Ursprung glatt ist), E besitze eine Schauder-Basis (darunter versteht man die natürlich Verallgemeinerung einer Hilbertraumbasis für Banachräume), X sei eine separable metrisierbare \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit, die auf E modelliert ist und X sei parallelisierbar. Dann existiert eine \mathcal{C}^∞ -Einbettung von X auf einer offenen Teilmenge von E .

Als nächstes möchten wir ein paar Beispiele für Banach-Mannigfaltigkeiten geben.

Beispiel 1.3.6. Das Trivial-Beispiel einer Banach-Mannigfaltigkeiten ist ein Banachraum $M = (B, \|\cdot\|)$ oder allgemeiner eine offene Teilmenge $M \subseteq_o B$ eines Banachraums.

Beispiel 1.3.7. Seien N, M endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten und sei $\mathcal{C}^k(N, M)$ die Menge aller \mathcal{C}^k -Abbildungen von N nach M , wobei $k \in \mathbb{N}_0$ sei. In einem Artikel von Halldor Eliasson [Eli67] wurde u.a. folgendes gezeigt:

*Sei N eine kompakte Mannigfaltigkeit und M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann kann der Raum $\mathcal{C}^k(N, M)$ mit der Struktur einer glatten Banach-Mannigfaltigkeit versehen werden. Für eine glatte Abbildung $h \in \mathcal{C}^k(N, M)$ lautet ein (lokaler) Modellraum $\Gamma_{\mathcal{C}^k}(N, h^*TM)$, wobei letzteres der Raum aller \mathcal{C}^k -Schnitte in das Bündel h^*TM sei.*

Die riemannsche Metrik von M wird für die Konstruktion der Norm von $\Gamma_{\mathcal{C}^k}(N, h^*TM)$ benötigt. Weiterhin braucht man die (riemannsche) Exponentialabbildung um einen Atlas von $\mathcal{C}^k(N, M)$ anzugeben. Es stellt sich im Nachhinein raus, dass die differenzierbare Struktur von $\mathcal{C}^k(N, M)$ nicht von der speziellen Metrik auf M abhängt.

Den Modellraum $\Gamma_{\mathcal{C}^k}(N, h^*TM)$ kann man sich am einfachsten so vorstellen: Wenn N einfach zusammenhängend ist, z.B. wenn N ein kompaktes Intervall von \mathbb{R} ist, dann kann man zeigen, dass $h^*TM \cong N \times \mathbb{R}^n$, wobei $n = \dim M$ sei. In diesem Fall gilt dann

$$\Gamma_{\mathcal{C}^k}(N, h^*TM) \cong \mathcal{C}^k(N, \mathbb{R}^n),$$

wobei der rechte Raum die aus der Funktionalanalysis bekannte \mathcal{C}^k -Norm trage.

Dem Autor ist nicht bekannt, ob $\mathcal{C}^k(N, M)$ für nicht einfach zusammenhängendes N genau einen Modellraum besitzt.

Historisch gesehen wurde das erste (dem Autor) bekannte Beispiel einer Banach-Mannigfaltigkeit auf einer Konferenz in Mexiko [JE58] vorgestellt. Dort wurde für einen kompakten topologischen Raum K und einer riemannschen Mannigfaltigkeit

M gezeigt, dass der Raum $\mathcal{C}^0(K, M)$ die Struktur einer Banach-Mannigfaltigkeit trägt. Es wurde aber nicht gezeigt, dass es nur einen Modellraum gibt. Nach einer privaten Unterhaltung mit Achim Krause [Kra13] vermutet der Autor aber, dass diese Aussage richtig ist, wenn K triangulierbar ist.

Kommentar 1.3.8. Das Beispiel 1.3.7 zeigt, dass relativ natürliche Objekte die Struktur einer Banach-Mannigfaltigkeit tragen.

Beispiel 1.3.9. Sei $k \in \mathbb{N}$ und (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ die 1-Sphäre. Betrachte auf S^1 das Oberflächenmaß. Setze

$$H^1(S, M) := \{c \in \mathcal{C}^0(S, M) \mid \text{f.ü. } \exists \dot{c}(t) \text{ und es gilt } \int_S g(\dot{c}, \dot{c}) < \infty\}.$$

Im Buch von Klingenberg [Kli76] wurde gezeigt, dass $H^1(S, M)$ eine Hilbert-Mannigfaltigkeit ist. Diese Mannigfaltigkeit nennt man auch *loop-space*. Eine verwandte Hilbert-Mannigfaltigkeit werden wir in dieser Arbeit ausgiebig studieren.

Als nächsten wollen wir den Begriff „Mannigfaltigkeit mit Rand“ verallgemeinern. Für diese Arbeit brauchen wir diese Definition nicht, aber wenn man sich mit der Morse-Theorie weiter auseinander setzt, benötigt man ihn. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass M zusammenhängend ist. Den Hilbertraum-Fall erwähnen wir nicht explizit.

Definition 1.3.10. Sei $\lambda: \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional ungleich 0. Setze

$$\mathbf{B}_\lambda^+ := \{x \in \mathbf{B} \mid \lambda(x) \geq 0\} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_\lambda^0 := \ker \lambda.$$

Wir nennen \mathbf{B}_λ^+ einen Halbraum und \mathbf{B}_λ^0 eine Hyperebene.

Für $k \geq 1$ und $U \subseteq_o \mathbf{B}_\lambda^+$ heißt eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbf{B}$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung, falls es eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq_o \mathbf{B}$ mit $U \subseteq \tilde{U}$ und eine \mathcal{C}^k -Abbildung $F: \tilde{U} \rightarrow \mathbf{B}$ gibt mit $F|_U = f$.

Sei M ein zusammenhängender topologischer Raum, \mathbf{B} ein Banachraum und $\lambda: \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ein beschränktes Funktional ungleich 0. Wir nennen (U, φ) eine **Karte** von M , wenn folgende Bedingungen gelten:

(a) $U \subseteq_o M$.

(b) Die Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq_o \mathbf{B}_\lambda^+$$

ist ein Homöomorphismus.

Sei I eine Indexmenge. Wir nennen $\mathfrak{A} := (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ einen **glatten Atlas** von M , wenn folgende Bedingungen gelten:

- (i) Für alle $i \in I$ ist (U_i, φ_i) eine Karte von M .
- (ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (iii) Für alle $i, j \in I$ ist die Abbildung

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

eine glatter Fréchet-Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von B_λ^+ .

Analog wie in Definition 1.3.1 kann man eine Äquivalenzklasse von Atlanten definieren. Sei c ein solche Klasse und sei \mathfrak{A} ein Mitglied in c .

Wir sagen $p \in \partial M$, falls es eine Karte (U, φ) von \mathfrak{A} gibt mit $\varphi(p) \in B_\lambda^0$ ist. ∂M heißt der **Rand von M** und $M \setminus \partial M$ heißt das **Innere von M** .

Das Tupel (M, c) heißt **B_λ^+ -Mannigfaltigkeit mit Rand**.

Kommentar 1.3.11. In [Lan99, II.4.3] wird gezeigt:

Seien B, C Banachräume, $\lambda \in B', \mu \in B'$ beschränkte Funktionale, $U \subseteq_o B_\lambda^+$ und $V \subseteq_o C_\mu^+$, so dass $U \cap B_\lambda^0$ und $V \cap C_\mu^0$ nicht-leer sind. Sei weiterhin $f: U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^p -Diffeomorphismus mit $p \geq 1$. Dann gilt $\lambda \neq 0$ genau dann wenn $\mu \neq 0$. Wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann induziert f einen \mathcal{C}^p -Isomorphismus von $\text{Int}(U)$ nach $\text{Int}(V)$ und von ∂U nach ∂V .

Damit ist der Rand ∂M und das Innere $M \setminus \partial M$ wohldefiniert, wenn M einen \mathcal{C}^1 -Struktur trägt, d.h. für zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) gilt $\varphi(p) \in B_\lambda^0$ genau dann, wenn $\psi(p) \in B_\lambda^0$ ist.

Falls $\dim B = \infty$ ist, dann kann man zeigen, dass B_λ^+ homöomorph zu B ist, d.h. es gilt $M = \partial M$, wenn M eine \mathcal{C}^0 -Struktur besitzt. Aus diesen Grund muss man mindestens einen \mathcal{C}^1 -Atlas für eine Banach-Mannigfaltigkeit mit Rand fordern.

Möchte man nun nicht-zusammenhängende Banach-Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren, so orientiere man sich an Kommentar 1.3.2 bzw. Definition 1.3.3.

Definition 1.3.12. Sei M eine zusammenhängende B -Mannigfaltigkeit und $P \subseteq B$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir nennen eine zusammenhängende Teilmenge $P \subseteq M$ eine **Banach-Untermannigfaltigkeit** (oder eine (B, P) -Untermannigfaltigkeit) von M , falls es für jeden Punkt $p \in P$ eine Karte (U, φ) , so dass $\varphi(U \cap P) = \varphi(U) \cap P$ gilt. Wenn der Unterraum P in B spaltet, dann nennen wir P eine **direkte (B, P) -Untermannigfaltigkeit**.

Kommentar 1.3.13. Es ist klar, dass (B, P) -Untermannigfaltigkeiten automatisch P -Mannigfaltigkeiten sind.

Wenn man die Definition 1.3.12 auf Mannigfaltigkeiten mit Rand erweitern würde, dann erkennt man sofort, dass wenn M eine \mathbf{B}_λ^+ -Mannigfaltigkeit ist, dass dann ∂M eine $(\mathbf{B}_\lambda^+, \mathbf{B}_\lambda^0)$ -Untermannigfaltigkeit ist.

Der Begriff Untermannigfaltigkeit ist schwieriger zu handhaben als im endlich-dimensionalen Fall. Wir werden uns nur für direkte Untermannigfaltigkeit interessieren. Um ein brauchbares Kriterium anzugeben, benötigen wir die Definition vom Tangentialraum. Die nächste Definition stammt inhaltlich aus [Lan99].

Definition 1.3.14. Sei M eine Banach-Mannigfaltigkeit und $p \in M$ fest. Für die Menge aller Tupel (φ, v) , wobei (U, φ) eine Karte um p und $v \in \mathbf{B}$ sei, definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$(\varphi, v) \sim (\psi, w) \quad :\Leftrightarrow \quad v = d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} w.$$

Bezeichne $[\varphi, v]_p$ die Äquivalenzklasse von (φ, v) . Wegen der Kettenregel wird durch

$$\begin{aligned} [\varphi, v]_p + [\psi, w]_p &:= [\varphi, v + d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} w]_p \\ \lambda \cdot [\varphi, v]_p &:= [\varphi, \lambda \cdot v]_p \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Vektorraum Struktur auf die Menge der Restklassen gegeben. Wir bezeichnen diesen Vektorraum mit $T_p M$ und nennen ihn den **Tangentialraum** von M an p . Die Elemente $[\varphi, v]_p$ von $T_p M$ heißen **Tangentialvektoren** an p .

Kommentar 1.3.15. Jede Karte (U, φ) um p induziert eine lineare bijektive Abbildung von $T_p M$ nach \mathbf{B} . Diese ist gegeben durch die (wohldefinierte) Abbildung

$$\tilde{\varphi}: T_p M \rightarrow \mathbf{B}, \quad [\varphi, v]_p \mapsto v.$$

Die (wohldefinierte) lineare Umkehrabbildung lautet

$$\tilde{\varphi}^{-1}: \mathbf{B} \rightarrow T_p M, \quad v \mapsto [\varphi, v]_p.$$

Falls die Kartenwahl (U, φ) ausgezeichnet ist (z.B. wenn $M = \mathbf{B}$ ein Banachraum ist, kann man $\varphi = \mathbb{1}$ wählen), dann identifizieren wir $T_p M$ mit \mathbf{B} kanonisch via dem obigen Isomorphismus.

In jedem Fall kann man auf $T_p M$ via $\tilde{\varphi}$ eine natürliche Topologie installieren. Die Topologie hängt wegen Forderung (iii) von Definition 1.3.1 nicht von der speziellen Kartenwahl (U, φ) ab. Somit wird $T_p M$ zu einem Banachraum bzw. Hilbertraum. Man beachte aber: Da die Kartenübergänge $d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$ für zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) um p i.Allg. keine Isometrien sind, gibt es keine kanonische Art auf $T_p M$ eine Norm oder ein Skalarprodukt zu installieren.

Bevor wir den Tangentialraum weiter studieren können, müssen wir wissen, was eine glatte Kurve in einer Banach-Mannigfaltigkeit sein soll.

Definition 1.3.16. Seien M, N zwei glatte Banach-Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Wir sagen, dass f eine **glatte Abbildung** ist, wenn f eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (i) Für alle Karten (U, φ) von M , (V, ψ) von N und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine k -fach differenzierbare Abbildung im Sinne von Definition 1.2.7.
- (ii) Für alle $p \in M$ und $k \in \mathbb{N}$ ist f in p k -differenzierbar, d.h. für eine beliebige Karte (U, φ) um p und eine Karte (V, ψ) um $f(p)$ ist die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$ k -differenzierbar im Sinne von Definition 1.2.8.

Die Menge der glatten Abbildung $f: M \rightarrow N$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Wir bezeichnen speziell $\mathcal{E}(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Kommentar 1.3.17. Unsere Definition vom Tangentialraum ist eine abstrakte Umformulierung der Tangentialraum Definition aus der klassischen Mechanik. Tatsächlich kann man $[\varphi, v]_p$ eine Äquivalenzklasse von glatten Kurven durch p zuordnen und umgekehrt. Das möchten wir hier näher erläutern:

Sei M eine B -Mannigfaltigkeit und sei

$$\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}, M) := \{ \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M) \mid \gamma(0) = p \}$$

die Menge aller glatten Kurven durch p . Für eine Karte (U, φ) um p setzen wir

$$\Theta_\varphi: \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}, M) \rightarrow B, \quad \gamma \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

Θ_φ ist surjektiv, denn ein (mögliches) Rechts-Inverses ist gegeben durch

$$R_\varphi: B \rightarrow \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}, M), \quad v \mapsto [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(0) + t \cdot v)].$$

Wir definieren eine Relation:

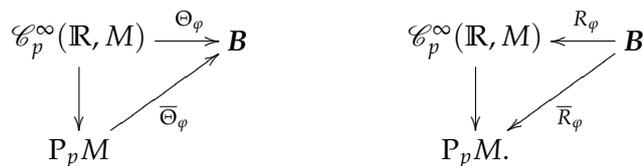
$$\gamma \sim \gamma' \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Karte } \varphi \text{ mit } \Theta_\varphi(\gamma) = \Theta_\varphi(\gamma').$$

Sei (V, φ') eine weitere Karte um p . Mit der Kettenregel sieht man, dass

$$\Theta_\varphi(\gamma) = \Theta_\varphi(\gamma') \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{\varphi'}(\gamma) = \Theta_{\varphi'}(\gamma')$$

gilt. Weiterhin gilt $R_\varphi \circ \Theta_\varphi(\gamma) \sim \gamma$, d.h. R_φ ist links-invers zu Θ_φ modulo dieser Relation.

Damit hat man auf $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}, M)$ eine wohldefinierte Äquivalenzrelation und wir bezeichnen die Quotientenmenge mit $P_p M$ (P steht für „path“) und die Restklasse von γ durch $[\gamma]_p$. Betrachte nun die Diagramme



Mit dem oben Gesagten ist es klar, dass

$$\bar{R}_\varphi \circ \bar{\Theta}_\varphi = \mathbb{1}_{P_p M} \quad \text{und} \quad \bar{\Theta}_\varphi \circ \bar{R}_\varphi = \mathbb{1}_B$$

gilt. Wir installieren auf $P_p M$ eine Vektorraum-Struktur, so dass $\bar{\Theta}_\varphi$ ein Vektorraum-Isomorphismus wird. Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Struktur nicht von φ abhängt. Anschließend installiert man auf $P_p M$ eine Topologie, so dass $\bar{\Theta}_\varphi$ ein toplinearer Isomorphismus wird. Die Topologie hängt dann nicht von φ ab.

$P_p M$ ist kanonisch isomorph (als topologischer Vektorraum) zu $T_p M$. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$T_p M \rightarrow P_p M, \quad [\varphi, v]_p \mapsto [R_\varphi(v)]_p,$$

und die Umkehrabbildung lautet

$$P_p M \rightarrow T_p M, \quad [\gamma]_p \mapsto [\varphi, \Theta_\varphi(\gamma)]_p.$$

Wenn es sich anbietet, werden wir Tangentialvektoren als Äquivalenzklasse von Kurven ansehen. Insbesondere können wir Tangentialvektoren immer noch als Derivationen auf den Raum der Keime $\mathcal{E}_p(M)$ auffassen, d.h. für eine Restklasse $v = [\gamma]_p$ ist die lineare Abbildung

$$\xi_v: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_p \mapsto \xi_v(f_p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

derivativ. Allerdings ist der Raum der Derivationen $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R})$ für eine unendlich-dimensionale Banach-Mannigfaltigkeit schwierig zu handhaben. Darauf wollen wir nicht näher eingehen (vgl. [KM97, 28.1]).

Definition 1.3.18. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Banach Mannigfaltigkeiten. Wir definieren **das Differential von f in p** durch folgenden stetigen Operator

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad [\varphi, v]_p \mapsto [\psi, d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v]_{f(p)}$$

oder äquivalent durch

$$df_p: P_p M \rightarrow P_{f(p)} N, \quad [\gamma]_p \mapsto [f \circ \gamma]_{f(p)}.$$

Wenn M, N Banachräume sind, dann stimmt das neue df_p mit dem alten Differential via der kanonischen Identifizierung überein.

II. Satz vom regulären Wert

Für diesen Abschnitt seien \mathbb{M}, \mathbb{N} vollständig normierbare topologische Vektorräume (ausnahmsweise meinen wir mit \mathbb{N} nicht die natürliche Zahlen).

Motivation. In diesem Abschnitt möchten wir den Satz vom regulären Wert für Banach-Mannigfaltigkeiten formulieren.⁴ Wir werden kurz demonstrieren, wieso man diesen Satz vom endlich-dimensionalen Fall nicht einfach übernehmen kann. Als Beispiel dafür konstruieren wir eine glatte Funktion zwischen zwei Banachräumen, die 0 als regulären Wert hat, wo aber das Urbild von 0 keine Untermannigfaltigkeit ist. Dieses Beispiel stammt von [Dou66, §1.8].

Wir haben im Anhang als Proposition A.2.10 folgende Aussage bereit gestellt:

Es existiert ein Banachraum X und ein abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq X$, so dass $X \not\cong A \times X/A$.

Es bezeichne nun $\pi: X \rightarrow X/A$ die kanonische Projektion. Betrachte die glatte (sogar analytische) Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times X \times X/A \rightarrow X/A, \quad (t, x, y) \mapsto \pi(x) + ty.$$

Es ist nun $0 \in X/A$ ein regulärer Wert von f ist, denn für $(t_0, x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ und $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times X \times X/A$ gilt

$$df_{(t_0, x_0, y_0)}(t, x, y) = \pi(x) + t_0 y + ty_0.$$

$df_{(t_0, x_0, y_0)}$ ist surjektiv, da π surjektiv ist. Angenommen $P := f^{-1}(0)$ wäre eine Banach-Untermannigfaltigkeit. Für alle $(t_0, x_0, y_0) \in P$ gilt dann $T_{(t_0, x_0, y_0)}P = \ker(df_{(t_0, x_0, y_0)})$. Betrachte das Differential von f entlang der Gerade $\{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq X$. Für $t_0 = 0$ gilt

$$\ker(df_{(0,0,0)}) = \mathbb{R} \times A \times X/A$$

und für $t_0 \neq 0$ gilt

$$\ker(df_{(t_0,0,0)}) = \mathbb{R} \times \text{Graph}\left(\frac{-\pi}{t_0}: X \rightarrow X/A\right) \cong \mathbb{R} \times X.$$

Aus $X \not\cong A \times X/A$ folgt $\mathbb{R} \times X \not\cong \mathbb{R} \times A \times X/A$ (vgl. Korollar A.2.12). Damit ist $\ker(df_{(0,0,0)}) \not\cong \ker(df_{(t,0,0)})$ für alle $t \neq 0$. Das liefert einen Widerspruch zur Annahme, dass P eine Banach-Untermannigfaltigkeit von X ist.

Satz 1.3.19 (Satz vom regulären Wert). *Seien M eine \mathbb{M} -Mannigfaltigkeit, N ein \mathbb{N} -Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $q \in N$ beliebig. Folgende Voraussetzungen sind äquivalent:*

⁴Der Begriff regulärer Wert wurde in Definition 1.2.18 erklärt.

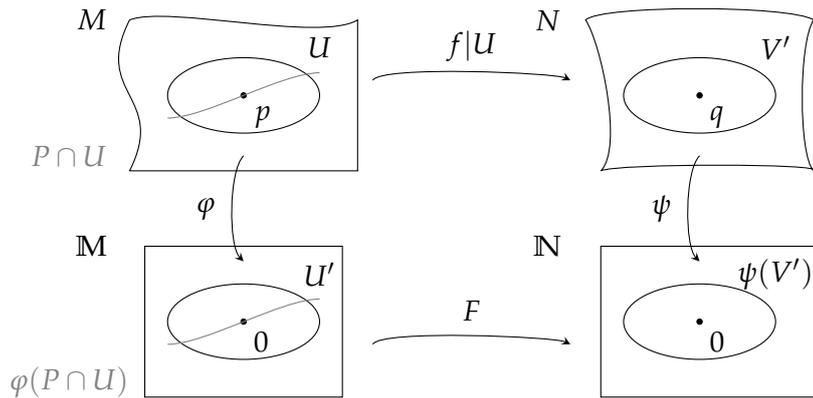


Abbildung 1.1.: Zum Beweis von Satz 1.3.19

(i) Für alle $p \in f^{-1}(q)$ besitzt $df_p: T_pM \rightarrow T_qN$ ein stetiges Rechts-Inverses.

(ii) q ist ein regulärer Wert und für alle $p \in f^{-1}(q)$ spaltet $\ker(df_p)$.

Falls (i) gilt, dann ist $P := f^{-1}(q)$ eine direkte Banach-Untermannigfaltigkeit von M und für alle $p \in P$ ist $T_pP = \ker df_p$.

Kommentar 1.3.20. Achtung! P kann viele Modellräume besitzen.

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor. Für die behauptete Äquivalenzen von (i) und (ii) siehe Lemma 1.1.45.

Sei $\varphi: U \rightarrow U'$ eine zentrierte Karte um $p \in f^{-1}(q)$, $\psi: V' \rightarrow \psi(V')$ eine zentrierte Karte um q und $F := \psi \circ (f|U) \circ \varphi^{-1}: U' \rightarrow \mathbb{N}$, vgl. Abbildung 1.1. Nach Voraussetzung besitzt df_p ein stetiges Rechts-Inverses und damit hat auch dF_0 ein stetiges Rechts-Inverses. Wegen Lemma 1.1.45 existiert ein abgeschlossener Unterraum $B \subseteq \mathbb{M}$ mit $\mathbb{M} = \ker(dF_0) \oplus_{\text{top}} B$.

Der Satz über implizite Funktionen, Theorem 1.2.15, lässt sich anwenden. Wir führen das genau aus: Es ist $d_B F_0$ ein toplinärer Isomorphismus. Deswegen existieren offene Umgebungen $V = V(0) \subseteq_o \ker(dF_p)$, $W = W(0) \subseteq_o B$ und eine glatte Abbildung $g: V \rightarrow W$ mit $g(0) = 0$ und der Eigenschaft

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x) = y \quad \forall (x, y) \in V \times W.$$

Man beachte, dass nach Konstruktion $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x, y) \in P \cap U$ ist.

Betrachte die glatte Abbildung

$$\tilde{\varphi}: V \times W \rightarrow \ker(dF_p) \times B, \quad (x, y) \mapsto (x, y - g(x)).$$

Man kann nachrechnen, dass das Differential von $\tilde{\varphi}$ in jedem Punkt bijektiv ist. Nach Korollar 1.2.17 hat $\tilde{\varphi}$ ein offenes Bild. Mit geeignetem Definitionsbereich ist die Abbildung

$(x, y) \mapsto (x, y + g(x))$ die Umkehrabbildung von $\tilde{\varphi}$. Damit ist die Abbildung

$$\Phi: \varphi^{-1}(V \times W) \rightarrow \mathbb{M}, \quad x \mapsto \tilde{\varphi} \circ \varphi(x)$$

eine Karte um p . Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\Phi(\varphi^{-1}(V \times W) \cap P) = \Phi(\varphi^{-1}(V \times W)) \cap \ker(dF_p)$$

gilt. Also ist P lokal eine $\ker(dF_p)$ -Untermannigfaltigkeit von M . Das zeigt die Behauptung. \square

Kommentar 1.3.21. Wenn \mathbb{M} ein hilbertisierbarer topologischer Vektorraum ist, dann kann man wegen Satz 1.1.40 die Voraussetzungen von Satz 1.3.19 darauf einschränken, dass man einen regulären Wert hat. Aus diesem Grund passt der Name *Satz vom regulären Wert* für unsere Anwendung.

In der Literatur, z.B. [MS04], wird dieser Satz auch als *Satz über implizite Funktionen* angeführt. Die Definition von *regulärer Wert* wird außerdem so angepasst, dass man die Bedingung (i) hinzunimmt.

In anderen Texten, wie z.B. [Lan99] und [Dou66], definiert man den Begriff *Submersion* und zeigt dann, dass Urbilder von Submersionen Untermannigfaltigkeiten sind.

Kommentar 1.3.22. Seien M, N und $f: M \rightarrow N$ wie in Satz 1.3.19 und sei $q \in N$ ein regulärer Wert von f . Angenommen für alle $p \in P := f^{-1}(q)$ ist $\ker(df_p)$ endlichdimensional. Dann sind wegen Proposition 1.1.42 (i) die Voraussetzungen des Satzes vom regulären Wert erfüllt. Wegen Kommentar 1.3.2 kann man dann für jede Zusammenhangskomponente P_i von P eine natürliche Zahl n_i finden, so dass für alle $p \in P_i$ die Isomorphie $\ker(df_p) \cong \mathbb{R}^{n_i}$ gilt. Setze $n := (n_i)_{i \in I}$, wobei $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ gelte. Wir sagen dann, dass P eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Wir erinnern an den Satz von Sard-Smale (Theorem 1.2.23). Wir möchten dieses Theorem mit Satz 1.3.19 kombinieren.

Definition 1.3.23. Sei M eine \mathbb{M} -Mannigfaltigkeit, N eine \mathbb{N} -Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass f eine **Fredholm-Abbildung** ist, wenn für alle $p \in M$ das Differential

$$df_p: T_p M \rightarrow T_p N$$

ein Fredholm-Operator ist. Für $p \in M$ definieren wir den Fredholm-Index von f in p durch

$$\text{index } f(p) := \text{index}(df_p).$$

Kommentar 1.3.24. Es ist einfach zu sehen, dass f genau dann eine Fredholm-Abbildung ist, wenn für alle Karten (U, φ) und (V, ψ) die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine Fredholm-Abbildung im Sinne von Definition 1.2.21 ist. Wegen der Index Formel (Satz 1.1.55 (ii)) gilt

$$\text{index } f(p) = \text{index}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

falls die Komposition $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ Sinn ergibt.

Mit dem oben Gesagten ist dann klar, dass wir mit denselben Argumenten wie in Kommentar 1.2.22 zeigen können, dass

$$\text{index } f(p): M \rightarrow \mathbb{Z}$$

eine lokal konstante Abbildung ist.

Wir formulieren Theorem 1.2.23 nochmals als Korollar für Banach-Mannigfaltigkeiten.

Korollar 1.3.25 (Satz vom regulären Wert für Fredholm-Abbildungen). Sei M eine \mathbb{M} -Mannigfaltigkeit, N eine \mathbb{N} -Mannigfaltigkeit, M und N seien separabel und $f: M \rightarrow N$ sei eine glatte Fredholm-Abbildung. Dann sind fast alle Punkte $q \in N$ reguläre Werte von f , d.h. für fast alle $q \in N$ ist $P := f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M .⁵ Wenn $P \neq \emptyset$ ist, dann stimmt die lokale Dimension von P mit dem Fredholm-Index von f überein.

III. Banach- und Hilbert-Bündel

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit Banachraum bzw. Hilbertraum einen vollständig normierbaren topologischen Vektorraum bzw. einen hilbertisierbaren topologischen Vektorraum. Weiterhin seien für diesen Abschnitt B und E Banachräume. Es sei M eine B -Mannigfaltigkeit, E eine $B \times E$ -Mannigfaltigkeit und $\pi: E \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung.

Definition 1.3.26. Sei $U \subseteq_o M$. Wir nennen eine glatte Abbildung $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E$ eine **Bündelkarte** oder eine **lokale Trivialisierung** von $\pi: E \rightarrow M$, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times E \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

kommutiert.

Kommentar 1.3.27. Sei $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E$ eine Bündelkarte von $\pi: E \rightarrow M$. Es ist dann nicht schwer zu sehen, dass alle $p \in U$ reguläre Werte von π sind. Da pr_1 ein

⁵„Fast alle“ bedeutet, dass es eine Ausnahmemenge der 1. Baire Kategorie gibt; vgl. Definition 1.2.20.

stetiges Rechts-Inverses besitzt, besitzt $d\pi_\xi$ für alle $\xi \in \pi^{-1}(U)$ ebenfalls ein stetiges Rechts-Inverses. Wir bezeichnen die **Faser** über p als die Menge $E_p := \pi^{-1}(p)$. E_p ist abgeschlossen, nicht-leer und wegen dem Satz vom regulären Wert eine direkte $(\mathcal{B} \times E, E)$ -Untermannigfaltigkeit von E . Die glatte Abbildung

$$\phi_p := \text{pr}_2 \circ (\phi|_{E_p}): E_p \rightarrow E$$

ist ein Diffeomorphismus.

Kommentar 1.3.28. Gelegentlich betrachten wir zu einer Karte (U, φ) von M eine glatte Abbildung $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & \varphi(U) \times E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \end{array}$$

kommutieren lässt. Das Tripel (U, φ, ϕ) bezeichnen wir dann auch als **Bündelkarte** oder **lokale Trivialisierung**, obwohl wir das nicht in Definition 1.3.26 vereinbart haben. ϕ ist strikt gesehen nur eine (spezielle) Karte von E .

Definition 1.3.29. Sei $\mathfrak{A} = (\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times E)_{i \in I}$ eine Familie von Bündelkarten von $\pi: E \rightarrow M$. Wir nennen \mathfrak{A} einen **Bündelatlas** von ζ , falls $\bigcup_{i \in I} U_i = B$ ist und für alle $p \in B$ die Abbildung

$$\phi_{ij}(p) := (\phi_i)_p \circ (\phi_j)_p^{-1}: E \rightarrow E \quad (*)$$

ein stetiger linearer Isomorphismus ist.

Wir sagen, dass eine Bündelkarte $\tilde{\phi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow E$ kompatibel mit \mathfrak{A} ist, wenn $\mathfrak{A} \cup (\tilde{\phi})$ immer noch Bedingung (*) erfüllt. Sei \mathfrak{B} ein weiterer Bündelatlas. Wir sagen, dass \mathfrak{A} mit \mathfrak{B} kompatibel ist, falls jedes Mitglied von \mathfrak{A} mit \mathfrak{B} kompatibel ist. Das induziert eine Äquivalenzrelation. Sei c die Äquivalenzklasse von \mathfrak{A} bzgl. dieser Relation. Setze $\zeta := (E, \pi, M, E)$. Wir bezeichnen (ζ, c) oder einfach nur ζ als **Banach-Bündel** bzw. **E -Bündel** über M . Wenn B und E Hilberträume sind, bezeichnen wir ζ als **Hilbert-Bündel**. Wenn $\dim B < \infty$ und $\dim E < \infty$ sind, dann bezeichnen wir ζ als **Vektorbündel** vom Rang $r = \dim E$.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\zeta = (E, \pi, M, E)$ ein Banach-Bündel.

Definition 1.3.30. Für ein Banach-Bündel ζ nennen wir E den **Totalraum**, M den **Basisraum**, $\pi: E \rightarrow M$ die **Projektion** und E die **typische Faser**. Die **Faser** über p bezeichnen wir mit $E_p := \pi^{-1}(p)$.

Kommentar 1.3.31. Man kann die obigen Definitionen auch auf Banach-Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, die mehr als einen Modellraum besitzen. Dazu orientiere man sich an Kommentar 1.3.2 und Definition 1.3.3.

Kommentar 1.3.32. Sei $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Es bezeichne $GL(E)$ die Gruppe der Automorphismen von $L(E, E)$. Es ist nicht schwer folgende Aussage zu zeigen:

Sei $U \subseteq_0 M$. Die Abbildung $F: U \rightarrow L(E, E)$ ist genau dann glatt, wenn die Abbildung

$$\tilde{F}: U \times E \rightarrow E, \quad (u, e) \mapsto F(u)e$$

glatt ist.

Die Abbildung

$$(U_i \cap U_j) \times E \rightarrow E, \quad (p, e) \mapsto \text{pr}_2 \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, e) = \phi_{ij}(p)e$$

ist glatt (die Bedingung (*) benötigt man hier, um die Glattheit bzgl. e zu zeigen). Damit ist auch

$$U_i \cap U_j \rightarrow GL(E), \quad p \mapsto \phi_{ij}(p)$$

glatt.

Kommentar 1.3.33. Betrachte eine Bündelkarte $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E$ und die (induzierte) Abbildung

$$\phi_p: E_p \rightarrow E,$$

wobei $p \in U$ sei. Nach Kommentar 1.3.27 ist E_p eine Untermannigfaltigkeit und ϕ_p eine glatte Abbildung. Installiere nun auf E_p eine Vektorraum-Struktur via ϕ_p . E_p ist dann ein vollständig normierbarer topologischer Vektorraum. Wegen Bedingung (*) ist es klar, dass die Vektorraum-Struktur von E_p nicht von ϕ_p abhängt. Weiterhin ist mit dem oben gesagten klar, dass die Banachraum-Struktur in gewisser Weise glatt vom Fußpunkt p abhängt.

Definition 1.3.34. Wir nennen eine beliebige Abbildung $X: M \rightarrow E$ einen **Schnitt** in ξ , falls $\pi \circ X = \mathbb{1}_M$ ist. Die Menge aller Schnitte in ξ bezeichnen wir mit $\Gamma(M, E)$, $\Gamma(E)$ oder $\Gamma(\xi)$. Die Menge aller **stetigen Schnitte** in ξ bezeichnen wir mit $\Gamma_{\mathcal{C}^0}(M, E)$, $\Gamma_{\mathcal{C}^0}(E)$ oder $\mathcal{C}^0(\xi)$. Die Menge aller **glatten Schnitte** in ξ bezeichnen wir mit $\Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(M, E)$, $\Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(E)$ oder $\mathcal{C}^\infty(\xi)$.

Kommentar 1.3.35. Wir setzen $\mathcal{E}(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Alle oben aufgeführten Räume sind in natürlicher Weise \mathbb{R} -Vektorräume und $\mathcal{E}(M)$ -Moduln. Um aber eine interessante Topologie auf diesen Räumen einführen zu können, müssen wir mehr Forderungen an ξ stellen. Z.B. muss man für $\Gamma_{\mathcal{C}^0}(M, E)$ zuerst einmal fordern, dass M kompakt ist und anschließend verlangen, dass ξ eine Bündelmetrik besitzt. Darauf werden wir in einem anderen Abschnitt näher eingehen.

Beispiel 1.3.36 (Tangentialbündel). Für eine B -Mannigfaltigkeit M setzen wir

$$TM := \sum_{p \in M} T_p M \approx \{(p, \xi_p) \mid p \in M \text{ und } \xi_p \in T_p M\}.$$

Die Menge nach \approx ist eine alternative Art TM als Menge auszudrücken. Definiere die kanonische Projektion

$$\pi: \sum_{p \in M} T_p M \rightarrow M, \quad \xi \mapsto p \Leftrightarrow \xi \in T_p M.$$

Sei $\mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Atlas von M . Betrachte die von φ_i induzierte Abbildung

$$\widetilde{D}\varphi_i: TU_i \times \varphi_i(U_i) \times \mathbf{B}, \quad [\varphi, v]_p \mapsto (p, v)$$

und setze $\mathfrak{B} := (\widetilde{D}\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbf{B})_{i \in I}$ (wir erklären später, warum ein Tilde über dem $D\varphi$ steht). \mathfrak{B} induziert zunächst einmal eine Topologie auf TM und danach eine glatte Struktur. Anschließend rechnet man nach, dass alle Mitglieder von \mathfrak{B} die Bedingung (*) von Definition 1.3.29 erfüllen. Man prüfe noch, dass $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist. Wir haben nun auf $\tau_M := (TM, \pi, M, \mathbf{B})$ eine \mathbf{B} -Bündel-Struktur definiert. Wir nennen τ_M das **Tangentialbündel** von M . Es bleibt noch nachzuprüfen, dass die Bündel-Struktur von τ_M nur von der glatten Struktur von M abhängt.

Gelegentlich überlasten wir die Notation und nennen die Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel von M . Die glatten Schnitte in τ_M bezeichnen wir als **Vektorfelder** auf M und setzen $\mathfrak{X}(M) := \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(M, TM)$.

Kommentar 1.3.37. Wir haben in Definition 1.3.1 nicht gefordert, dass eine B -Mannigfaltigkeit separabel oder hausdorff sein muss. Wir merken an, dass wenn M hausdorff bzw. separabel ist, dass dann TM hausdorff bzw. separabel ist.

Als nächstes erweitern wir die Definition des Differentials (vgl. Definition 1.3.18).

Definition 1.3.38. Sei C ein Banachraum, M eine B -Mannigfaltigkeit, N eine C -Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Die Abbildung

$$Df: TM \rightarrow TN, \quad [\varphi, v]_p \mapsto [\psi, d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v]_{f(p)}$$

heißt das **Differential** von f .

Kommentar 1.3.39. Sei M, N und f wie oben.

- Vergleich man Definition 1.3.38 mit Definition 1.3.18, dann erkennt man

$$Df[\varphi, v]_p = df_p[\varphi, v]_p.$$

Das obere Differential verallgemeinert das Differential aus Definition 1.3.18. Trotzdem haben wir eine andere Bezeichnung gewählt, da spätestens $D(Df)$ etwas ganz anderes als d^2f ist (ein Rechnung dazu kommt später; vgl. Kommentar 1.3.41).

- Für $N \subseteq_o C$, d.h. die Inklusion $i: N \hookrightarrow C$ ist eine (globale) Karte von N , identifizieren wir TN mit $N \times C$ via $[i, v]_p \mapsto (p, v)$. Mit dieser Identifikation lautet das Differential von f

$$df: TM \rightarrow N \times C, \quad [\varphi, v]_p \mapsto (f(p), d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v)$$

und das Differential von f an p lautet

$$df_p: T_p M \rightarrow C, \quad [\varphi, v]_p \mapsto d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v.$$

- In Beispiel 1.3.36 haben wir die Bündelkarte

$$\widetilde{D}\varphi_i: TU_i \rightarrow U_i \times B, \quad [\varphi, v]_p \mapsto (p, v).$$

Das Tilde soll andeuten, dass die obige Bündelkarte zu dem Differential von φ_i ,

$$D\varphi_i: TU_i \rightarrow \varphi(U_i) \times B, \quad [\varphi, v]_p \mapsto (\varphi(p), v),$$

assoziiert ist. $D\varphi_i$ ist tatsächlich eine Bündelkarte im Sinne von Kommentar 1.3.28.

Beispiel 1.3.40 (Das doppelte Tangentialbündel). Da TM eine B^2 -Mannigfaltigkeit ist, kann man das Prozedere aus Beispiel 1.3.36 wiederholen und erhält damit das **doppelte Tangentialbündel** $\tau_{TM} := (T(TM), \pi_{TM}, TM, B^2)$. Wir schreiben auch $T^2M := T(TM)$. Für eine Karte (U, φ) von M war

$$D\varphi: TU \rightarrow \varphi(U) \times B, \quad [\varphi, v]_u \mapsto (\varphi(u), v)$$

eine Bündelkarte von TM im Sinne von Kommentar 1.3.28. Damit ist

$$D^2\varphi := D(D\varphi): T^2U \rightarrow \varphi(U) \times B \times B^2, \quad [D\varphi, (b_1, b_2)]_{[\varphi, v]_p} \mapsto (\varphi(p), v, (b_1, b_2))$$

eine Bündelkarte von T^2M im Sinne von Kommentar 1.3.28.

Kommentar 1.3.41. Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten von M . Setze $\phi := \psi \circ \varphi^{-1}$. Wir möchten $D\phi$ und $D^2\phi$ ausrechnen. Aus $\phi: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ folgt

$$D\phi: \varphi(U) \times B \rightarrow \psi(V) \times B, \quad D\phi(x, v) = (\phi(x), d\phi_x v). \quad (*)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} D^2\phi(x, v, b_1, b_2) &= (D\phi(x, v), d(D\phi)_{(x, v)}(b_1, b_2)) \\ &= \left((\phi(x), d\phi_x v), (d\phi_x b_1, d^2\phi_x(b_1, v) + d\phi_x b_2) \right), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} D^2\phi: \varphi(U) \times B \times B^2 &\mapsto \psi(V) \times B \times B^2 \\ D^2\phi(x, v, b_1, b_2) &= (\phi(x), d\phi_x v, d\phi_x b_1, d^2\phi_x(b_1, v) + d\phi_x b_2). \quad (**) \end{aligned}$$

Kommentar 1.3.42. Für die Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ gilt $d\pi: T^2M \rightarrow TM$. Sei (U, φ) eine Karte um $p \in M$. Wir möchten zeigen, dass

$$D\pi[D\varphi, (b_1, b_2)]_{[\varphi, v]_p} = [\varphi, b_1]_p$$

gilt, d.h. die Abbildung

$$D\varphi \circ D\pi \circ (D^2\varphi)^{-1}: \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{B}$$

ist die Projektion auf die erste und die dritte Komponente. Wenn $\pi_{TM}: T^2M \rightarrow M$ die Projektion des doppelten Tangentialbündels bezeichne, dann ist

$$D\varphi \circ \pi_{TM} \circ (D^2\varphi)^{-1}: \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{B}$$

die Projektion auf die ersten beiden Komponenten, d.h. es gilt $\pi_{TM} \neq d\pi$.

Es ist klar, dass

$$\varphi \circ \pi \circ (D\varphi)^{-1} = \text{pr}_{\varphi(U)}$$

ist, d.h. es gilt

$$d(\varphi \circ \pi \circ (D\varphi)^{-1}) = \text{pr}_1.$$

Damit rechnet man

$$\begin{aligned} D\pi[D\varphi, (b_1, b_2)]_{[\varphi, v]_p} &= [\varphi, d(\varphi \circ \pi \circ (D\varphi)^{-1})(b_1, b_2)]_{\pi[\varphi, v]_p} \\ &= [\varphi, \text{pr}_1(b_1, b_2)]_p = [\varphi, b_1]_p. \end{aligned}$$

Beispiel 1.3.43 (Vertikal Bündel). Sei M eine \mathbf{B} -Mannigfaltigkeit, $\pi: TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel und $\pi_{TM}: T^2M \rightarrow M$ das doppelte Tangentialbündel. Für $\xi \in T_pM \subseteq TM$ setzen wir

$$T_{\xi, v}(TM) := \ker(d\pi_{\xi}: T_{\xi}(TM) \rightarrow T_pM)$$

und nennen es den **Vertikal Raum** von $T_{\xi}(TM)$.

Wir behaupten

$$T_{\xi, v}TM \cong T_{\xi}T_pM \cong T_pM,$$

wobei $\pi(\xi) = p$ sei und alle Isomorphismen oben kanonisch sind. Insbesondere folgt daraus die Isomorphie $T_{\xi, v}TM \cong \mathbf{B}$. Da T_pM ein Banachraum ist, ist die rechte Isomorphie klar (wurde in Kommentar 1.3.15 gezeigt). Um die linke Isomorphie zu sehen, betrachte für ein beliebiges $W \in T_{\xi}T_pM$ eine Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_pM$ mit $\gamma(0) = \xi$ und $\dot{\gamma}(0) = W$, wobei $\varepsilon > 0$ ist. Es gilt $\pi \circ \gamma(t) = p$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und daraus folgt $0 = d\pi_{\xi}\dot{\gamma}(0) = d\pi_{\xi}W$. Das zeigt die linke kanonische Isomorphie.

Setze

$$T_v(TM) := \sum_{\xi \in TM} T_{\xi, v}TM$$

und betrachte die (eingeschränkte) Projektion

$$\pi_{T_v TM}: T_v TM \rightarrow TM, \quad \pi_{T_v TM}(W) = \xi \Leftrightarrow W \in T_{\xi, v}TM.$$

Wir bezeichnen $\tau_{TM}^v := (T_v TM, \pi_{T_v TM}, TM, \mathbf{B})$ als das **Vertikal Bündel** von $\pi: TM \rightarrow M$.

Kommentar 1.3.44. Um eine stetige Projektion von τ_{TM} nach τ_{TM}^v angeben zu können, damit meinen wir eine glatte Abbildung

$$P: T^2 M \rightarrow T_v TM,$$

so dass

$$P|_{T_\xi TM}: T_\xi TM \rightarrow T_{\xi,v} TM$$

eine stetige Projektion im Sinne von Lemma 1.1.41 ist, benötigen wir einen Zusammenhang auf $\pi: TM \rightarrow M$. Das werden wir im nächsten Abschnitt bereit stellen.

Beispiel 1.3.45 (Tangentialbündel von Banach-Bündeln). Für ein E -Bündel $\pi: E \rightarrow M$ ist E insbesondere eine $\mathbf{B} \times E$ -Mannigfaltigkeit, d.h. es existiert das Tangentialbündel von E , $\tau_E = (TE, \pi_E, E, \mathbf{B} \times E)$. Sei (U, φ) eine Karte von M und $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E$ eine Bündelkarte von $\pi: E \rightarrow M$ im Sinne von Kommentar 1.3.28. Dann ist

$$D\phi: T\pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E \times \mathbf{B} \times E$$

eine Bündelkarte von $\pi_E: TE \rightarrow E$ im Sinne von Kommentar 1.3.28.

Analog wie in Beispiel 1.3.43 kann man das Vertikal Bündel $\tau_E^v := (T_v E, \pi_{T_v E}, E, E)$ definieren (man beachte, dass $T_{\xi,h} E \cong E_p$ kanonisch isomorph ist, d.h. $T_{\xi,v} E \cong E$).

Beispiel 1.3.46. Seien $\xi = (E, \pi, M, E)$ und $\eta = (E', \pi', M, E')$ zwei Banach-Bündel über M . Wir setzen

$$L(E, E') := \sum_{p \in M} L(E, E').$$

Aus $E_p \cong E$ und $E'_p \cong E'$ folgt $L(E_p, E'_p) \cong L(E, E')$. Eine (kanonische) Projektion von $L(E, E')$ auf M ist gegeben durch

$$\pi_{L(E, E')}: L(E, E') \rightarrow M, \quad \pi_{L(E, E')}(T) = p \Leftrightarrow T \in L(E_p, E'_p).$$

Man kann nun nachrechnen, dass man dem Quadrupel

$$L(\xi, \eta) := (L(E, E'), \pi_{L(E, E')}, M, L(E, E'))$$

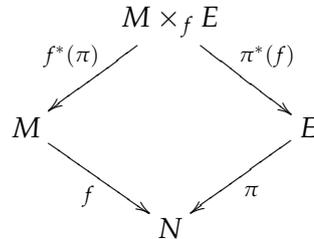
die Struktur eines Banach-Bündels über M geben kann.

Für $k \in \mathbb{N}$ wurde in Definition 1.1.33 der Raum der k -fach multilinearen stetigen Operatoren von $E \times \cdots \times E$ nach E' eingeführt. Diesen haben wir mit $L^k(E, E')$ bezeichnet. Durch eine ähnliche Konstruktion wie oben, kann man das Bündel $L^k(\xi, \eta)$ definieren.

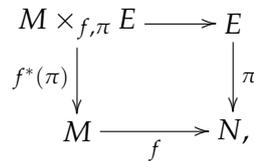
Beispiel 1.3.47 (Rückzugbündel). Seien B, C, E Banachräume, M eine B -Mannigfaltigkeit, N eine C -Mannigfaltigkeit, $\pi: E \rightarrow N$ ein E -Bündel über N und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Auf mengentheoretischer Ebene existiert das Faserbündel, d.i. die Menge

$$M \times_f E := \{(m, v) \in M \times E \mid f(m) = \pi(v)\},$$

mit induzierten Rückzug-Abbildungen $f^*(\pi) = \text{pr}_1$ und $\pi^*(f) = \text{pr}_2$



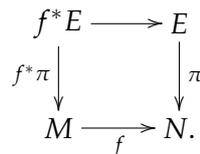
Das Faserbündel ist durch eine universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt, auf die wir nicht näher eingehen werden. Denken wir uns nun das obige Diagramm asymmetrisch, also



dann wird die folgende Notation klar: Setze

$$f^*E := \sum_{p \in M} E_{f(p)} \approx M \times_{f, \pi} E$$

und es bezeichne $f^*\pi$ die entsprechende Übersetzung vom alten $f^*(\pi)$, d.h. $f^*\pi(v) = p$ genau dann wenn $v \in E_{f(p)}$. Damit erhalten wir das Diagramm



Man kann $f^*\zeta := (f^*E, f^*\pi, M, E)$ die Struktur eines Banach-Bündels geben und wir nennen es das **Rückzugbündel** von ζ über f .

Würde man die Fasern über p von $f^*\zeta$ mit $(f^*E)_p$ notieren, dann würde man $(f^*E)_p = E_{f(p)}$ erhalten, ohne dass man kanonisch identifiziert. Aus technischen Gründen brauchen wir im nächsten Abschnitt noch die Abbildung π^*f , die man durch

$$\pi^*f: f^*(E) \rightarrow E, \quad (p, v_p) \mapsto (f(p), v_p)$$

definiert.

IV. Spray und Exponentialabbildung

Für diesen Abschnitt sei M eine B -Mannigfaltigkeit.

Definition 1.3.48. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(TM)$, d.h. $X: TM \rightarrow T^2M$ ist glatt und $\pi_{TM} \circ X = \mathbb{1}_{TM}$, heißt **Differentialgleichung zweiter Ordnung**, wenn $D\pi \circ X = \mathbb{1}_{TM}$ ist.

Proposition 1.3.49. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Vektorfeld. X ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung genau dann, wenn alle Integralkurven $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ von X die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \beta) = \beta$$

erfüllen.

Beweis. „ \Rightarrow “: Mithilfe der Kettenregel rechnet man

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \beta) = D\pi \circ \dot{\beta} = D\pi \circ X \circ \beta = \beta.$$

„ \Leftarrow “: Sei $\zeta \in TM$ beliebig. Wir müssen $D\pi \circ X(\zeta) = \zeta$ zeigen. Für ζ gibt es eine eindeutig bestimmte Integralkurve $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ mit $\beta(0) = \zeta$. Damit folgt

$$D\pi \circ X(\zeta) = D\pi \circ \dot{\beta}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi \circ \beta) = \beta(0) = \zeta. \quad \square$$

Definition 1.3.50. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir nennen eine Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine **Geodäte** von X , wenn $\dot{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ eine Integralkurve von X ist, d.h. es soll gelten $\ddot{\alpha} = X \circ \dot{\alpha}$.

Kommentar 1.3.51. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ eine Integralkurve von X . Aus Proposition 1.3.49 folgt, dass $\alpha := \pi \circ \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Geodäte von X ist. Damit stehen die Geodäten und Integralkurven von X in einer 1 zu 1 Korrespondenz.

Kommentar 1.3.52. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und (U, φ) eine Karte von M . Wir möchten die lokale Beschreibung von X untersuchen. Es gilt

$$D^2\varphi \circ X \circ (D\varphi)^{-1}: \varphi(U) \times \mathbf{B} \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}^2, \quad (x, b) \mapsto (x, b, \zeta^1(x, b), \zeta^2(x, b)),$$

wobei $\zeta^1, \zeta^2: \varphi(U) \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, das Vektorfeld X beschreiben. Aus $D\pi \circ X = \mathbb{1}_{TM}$ folgt $b = \zeta^1(x, b)$. Setze $f := \zeta^2$. Wenn $\beta = (\beta_1, \beta_2): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{B}$ eine Integralkurve von (ζ^1, ζ^2) ist, dann muss

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\beta_1, \beta_2) \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

gelten. Für die aus Kommentar 1.3.51 korrespondierende Geodäte $\alpha = \pi \circ \beta = \beta_1$ gilt dann

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}),$$

was die Namensgebung für Definition 1.3.48 klärt.

Definition 1.3.53. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein E -Bündel. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Multiplikation mit λ in E** durch

$$\text{mult}_E^\lambda: E \rightarrow E, \quad \zeta \mapsto \lambda \cdot \zeta.$$

Es ist klar, dass $\text{mult}_E^\lambda(E_p) \subseteq E_p$ gilt. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(TM)$ heißt ein **Spray**, wenn X eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist und wenn X für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$X \circ \text{mult}_{TM}^\lambda = D(\text{mult}_{TM}^\lambda) \circ \text{mult}_{T^2M}^\lambda \circ X$$

erfüllt.

Kommentar 1.3.54. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Spray und (U, φ) eine Karte von M . Wir möchten die lokale Beschreibung von X untersuchen. Dafür berechnen wir die lokale Beschreibung der Multiplikation mit λ . Es gilt

$$D^2\varphi \circ \text{mult}_{T^2M}^\lambda \circ (D^2\varphi)^{-1}(x, b, b_1, b_2) = (x, b, \lambda \cdot b_1, \lambda \cdot b_2)$$

und

$$D^2\varphi \circ D \text{mult}_{TM}^\lambda \circ (D^2\varphi)^{-1}(x, b, b_1, b_2) = (x, \lambda \cdot b, b_1, \lambda \cdot b_2).$$

Zusammen mit Kommentar 1.3.52 folgt, dass die lokale Darstellung $\zeta^2: \varphi(U) \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ von X die Gleichung

$$\lambda^2 \cdot \zeta^2(x, b) = \zeta^2(x, \lambda \cdot b)$$

erfüllen muss, d.h. ζ^2 ist homogen in seinem zweiten Argument. Es ist nicht schwer die folgende Proposition zu beweisen:

Seien \mathbf{B}, \mathbf{C} Banachräume, $U \subseteq_o \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ und $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ eine glatte Abbildung. f ist genau dann α -homogen, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f(\lambda \cdot b) = \lambda^\alpha \cdot f(b)$, wenn f die Gleichung

$$f(u) = \frac{1}{\alpha!} d^\alpha f(0)(u, \dots, u)$$

erfüllt.

Daraus folgt $\zeta^2(x, b) = \frac{1}{2} d_2^2 \zeta^2(x, 0) b^2$, wobei wir $b^2 = (b, b)$ gesetzt haben (vgl. auch Definition 1.2.8 für diese Notation). Setze

$$B_{(U, \varphi)}: \varphi(U) \rightarrow L_{\text{sym}}^2(\mathbf{B}, \mathbf{B}), \quad x \mapsto \frac{1}{2} d_2^2 \zeta^2(x, 0).$$

Eine solche Abbildung nennen wir eine glatte symmetrische Bilinearform. Damit gilt

$$D^2\varphi \circ X \circ (D\varphi)^{-1}(x, b) = (x, b, b, B_{(U,\varphi)}(x)b^2).$$

Man beachte, dass wegen der Polarisationsformel

$$B_{(U,\varphi)}(x)(b_1, b_2) = \frac{1}{2} \left(B_{(U,\varphi)}(x)(b_1 + b_2)^2 - B_{(U,\varphi)}(x)b_1^2 - B_{(U,\varphi)}(x)b_2^2 \right),$$

die Werte von $B_{(U,\varphi)}(x)$ durch die Werte von $B_{(U,\varphi)}(x)b^2$ festgelegt sind, wobei die Werte $B_{(U,\varphi)}(x)b^2$ durch X festgelegt sind.

Wenn (V, ψ) eine weitere Karte von M ist, dann möchten wir wissen, wie sich $B_{(U,\varphi)}$ zu $B_{(V,\psi)}$ transformiert. Sei $\phi := \psi \circ \varphi^{-1}$. Wir erinnern daran, dass wir in Kommentar 1.3.41 $D\phi$ und $D^2\phi$ explizit ausgerechnet haben; siehe Gleichung (*) und (**). Folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} & \xrightarrow{D^2\phi} & \psi(V) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \text{pr}_{1,2} \downarrow \uparrow \mathbb{1} \times B_{(U,\varphi)} & & \text{pr}_{1,2} \downarrow \uparrow \mathbb{1} \times B_{(V,\psi)} \\ \varphi(U) \times \mathbf{B} & \xrightarrow{D\phi} & \psi(V) \times \mathbf{B}. \end{array}$$

Daraus folgt unmittelbar die Transformationsformel

$$B_{(V,\psi)}(\phi(x))b^2 = d^2\phi_x b^2 + d\phi_x B_{(U,\varphi)}(x)b^2. \quad (\Delta)$$

Sei \mathfrak{A} ein Atlas von M . Ein Spray X induziert also eine Familie von lokalen Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$ die sich unter Kartenwechsel gemäß Gleichung (Δ) transformieren. Hat man nun umgekehrt eine Familie von Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$, die sich gemäß Gleichung (Δ) transformieren, dann definiert das einen Spray $X \in \mathfrak{X}(TM)$. Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in

Proposition 1.3.55. *Sei \mathfrak{A} ein Atlas von M . Wenn $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Spray ist, dann induziert X eine Familie von glatten symmetrischen Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$, die sich gemäß Gleichung (Δ) unter Kartenwechsel transformieren.*

Ist umgekehrt eine Familie von glatten symmetrischen Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$ gegeben, dann definieren diese einen Spray $X \in \mathfrak{X}(TM)$.

Proposition 1.3.55 werden wir im nächsten Abschnitt brauchen.

Kommentar 1.3.56. Sei N eine beliebige \mathbf{C} -Mannigfaltigkeit (z.B. $N = TM$ und $\mathbf{C} = \mathbf{B}^2$) und $X \in \mathfrak{X}(N)$ ein Vektorfeld auf N . Unter dem globalen Fluss von X verstehen wir eine glatte Abbildung

$$\Phi: \mathcal{O} \rightarrow N$$

mit den Eigenschaften:

- (i) $\mathcal{O} \subseteq_o \mathbb{R} \times N$.
- (ii) Für jedes $p \in N$ gibt es ein offenes Intervall $I(p) \subseteq_o \mathbb{R}$, so dass $\mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I(p)$ ist.
- (iii) Für $t \in I(p)$ und $s \in I(\Phi(t, p))$ gilt $s + t \in I(p)$ mit

$$\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s + t, p).$$

- (iv) Das glatte Vektorfeld

$$N \rightarrow TN, \quad p \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, p)$$

stimmt mit X überein.

- (v) Falls $\tilde{\Phi}: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow N$ die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt, dann gilt $\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}$ und $\Phi|_{\tilde{\mathcal{O}}} = \tilde{\Phi}$.

Man kann zeigen, dass es zu jedem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(N)$ einen globalen Fluss $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow N$ gibt. Im Buch von Lang [Lan99, IV, §, 2.6] wird der Beweis dafür so ausgeführt, dass man folgendes interessante Korollar erhält:

Korollar. Sei $X \in \mathfrak{X}(N)$ ein Vektorfeld, $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow N$ der zugehörige globale Fluss und $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist die Menge aller $p \in N$, mit $t_0 \in I(p)$, offen in N .

Definition 1.3.57. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Spray, $\Phi: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow TM$ der zugehörige globale Fluss und $\mathcal{O} := \{\xi \in TM \mid 1 \in I(\xi)\} \subseteq_o TM$. Definiere die **Exponentialabbildung** zu X durch

$$\exp: \mathcal{O} \rightarrow M, \quad \xi \mapsto \pi \circ \Phi(1, \xi).$$

Für $p \in M$ setze noch $\mathcal{O}_p := \mathcal{O} \cap T_p M \subseteq_o T_p M$. Wir definieren

$$\exp_p := \exp|_{\mathcal{O}_p}: \mathcal{O}_p \rightarrow M.$$

Kommentar 1.3.58. Es ist klar, dass $\exp: \mathcal{O} \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist. Per Definition ist $\forall v \in \mathcal{O}_p$

$$t \mapsto \exp_p(t \cdot v),$$

wobei t klein genug sei, eine Geodäte von X durch p . Umgekehrt findet man wegen Kommentar 1.3.51 zu jeder Geodäte $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ ein $v \in T_p M$, so dass

$$\alpha(t) = \exp_p(t \cdot v) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Für die Definition der Exponentialabbildung haben wir im Grunde genommen nur eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gebraucht. Da aber $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Spray ist, kann man relativ einfach folgendes Lemma zeigen:

Lemma. Das Differential von \exp_p an der Stelle $0_p \in T_p$,

$$d \exp_p(0): T_p M \rightarrow T_p M,$$

ist die Identität auf $T_p M$.

Mithilfe des Satzes über die inverse Funktion (Satz 1.2.16) kann man dann folgendes Lemma zeigen:

Lemma 1.3.59. Sei $X \in \mathfrak{X}(TM)$ ein Spray und $\exp: \mathcal{O} \rightarrow M$ die induzierte Exponentialabbildung. Dann existiert $\mathcal{D} \subseteq_o \mathcal{O}$, so dass

$$\pi \times \exp: \mathcal{D} \rightarrow M \times M, \quad \xi \mapsto (\pi(\xi), \exp_{\pi(\xi)}(\xi))$$

ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge der Diagonale von $M \times M$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{D}_p \neq \emptyset$ für alle $p \in M$.

V. Zusammenhang und kovariante Ableitung

Definition 1.3.60 (Zusammenhang). Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein E -Bündel. π induziert die Bündel $\pi_E: TE \rightarrow E$ und $D\pi: TE \rightarrow TM$ und diese induzieren die glatte Abbildung

$$\pi_E \oplus D\pi: TE \rightarrow E \oplus TM, \quad W \mapsto (\pi_E(W), D\pi(W)).$$

Wir nennen eine glatte bilineare Abbildung

$$H: E \oplus TM \rightarrow TE$$

einen **Zusammenhang** auf $\pi: E \rightarrow M$, wenn

$$(\pi_E \oplus D\pi) \circ H = \mathbb{1}_{E \oplus TM}$$

gilt. Wir nennen das Bild von H das **Horizontal Bündel** des Zusammenhangs, $T_h E := \text{Im}(H)$. Wenn $\pi: E \rightarrow M$ das Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$ ist, dann nennen wir einen Zusammenhang **symmetrisch**, wenn H symmetrisch als bilineare Abbildung ist.

Kommentar 1.3.61. Für $\pi: E \rightarrow M$ und dessen Tangentialbündel $\pi_E: TE \rightarrow E$ ist i.Allg. $\pi \circ \pi_E: TE \rightarrow M$ kein Vektorbündel über M sondern ein Faserbündel über M . Darauf wollen wir aber nicht näher eingehen.

Kommentar 1.3.62. Sei $H: E \oplus TM \rightarrow TE$ ein Zusammenhang auf $\pi: E \rightarrow M$. Sei (U, φ) eine Karte von M und

$$\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E$$

eine Bündelkarte von $\pi: E \rightarrow M$ im Sinne von Kommentar 1.3.28. Die Gleichung $(\pi_E \oplus D\pi) \circ H = \mathbb{1}_{E \oplus TM}$ impliziert

$$D\phi \circ H \circ (\phi \oplus D\phi)^{-1}(x, e, b) = (x, e, b, B_{(U, \phi), \phi}(x)(b, e)),$$

wobei

$$B_{(U, \phi), \phi}: \varphi(U) \rightarrow L^2(\mathbf{B}, \mathbf{E}; \mathbf{E})$$

eine glatte Bilinearform sei.

Sei nun $H: TM \oplus TM \rightarrow T^2M$ ein symmetrischer Zusammenhang auf dem Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$. Wir können dann $\phi = D\varphi$ wählen erhalten dann

$$D\varphi^2 \circ H \circ (D\varphi \oplus D\varphi)^{-1}(x, b_1, b_2) = (x, b_1, b_2, B_{(U, \varphi)}(x)(b_2, b_1)),$$

wobei

$$B_{(U, \varphi)}: \varphi(U) \rightarrow L_{\text{sym}}^2(\mathbf{B}, \mathbf{B})$$

eine glatte symmetrische Bilinearform ist. Wir möchten nun das Transformationsverhalten der $B_{(U, \varphi)}$ unter Kartenwechsel untersuchen. Sei (V, ψ) eine weitere Karte von M . Wegen der Kettenregel gilt

$$D^2(\psi \circ \varphi^{-1}) = D(D\psi \circ D\varphi^{-1}) = D^2\psi \circ D^2\varphi^{-1}$$

und

$$(D\psi \oplus D\psi) \circ (D\varphi \oplus D\varphi)^{-1} = (D(\psi \circ \varphi^{-1})) \oplus (D(\psi \circ \varphi^{-1})).$$

Für $\phi := \psi \circ \varphi^{-1}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} & \xrightarrow{D^2\phi} & \psi(V) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \text{pr}_{1,2} \downarrow \uparrow \mathbb{1} \times B_{(U, \varphi)} & & \text{pr}_{1,2} \downarrow \uparrow \mathbb{1} \times B_{(V, \psi)} \\ \varphi(U) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} & \xrightarrow{D\phi \oplus D\phi} & \psi(V) \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}. \end{array}$$

womit man leicht nachrechnet, dass sich $B_{(U, \varphi)}$ zu $B_{(V, \psi)}$ via

$$B_{(V, \psi)}(\phi(x))b^2 = d^2\phi_x b^2 + d\phi_x B_{(U, \varphi)}(x)b^2.$$

transformieren, was dieselbe Transformationsformel ist wie in Gleichung (Δ). Ein Zusammenhang H induziert also eine Familie von symmetrischen Bilinearformen, die sich gemäß (Δ) transformieren. Umgekehrt ist es klar, dass eine Familie von Bilinearformen, die sich gemäß (Δ) transformieren, einen symmetrischen Zusammenhang H definieren. Wir fassen dieses Ergebnis in der nächsten Proposition zusammen.

Proposition 1.3.63. Sei \mathfrak{A} ein Atlas von M . Wenn $H: TM \oplus TM \rightarrow T^2M$ ein symmetrischer Zusammenhang auf $\pi: TM \rightarrow M$ ist, dann induziert H eine Familie von glatten symmetrischen Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$, die sich gemäß Gleichung (Δ) unter Kartenwechsel transformieren.

Ist umgekehrt eine Familie von glatte symmetrischen Bilinearformen $(B_{(U,\varphi)})_{(U,\varphi) \in \mathfrak{A}}$ gegeben, dann definieren diese einen symmetrischen Zusammenhang $H: TM \oplus TM \rightarrow T^2M$ auf $\pi: TM \rightarrow M$.

Korollar 1.3.64. Es gibt eine 1 zu 1 Korrespondenz zwischen den symmetrischen Zusammenhängen $H: TM \oplus TM \rightarrow T^2M$ auf dem Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$ und den Sprays $X \in \mathfrak{X}(TM)$.

Kommentar 1.3.65. Ist ein Zusammenhang $H: E \oplus TM \rightarrow TE$ auf $\pi: E \rightarrow M$ gegeben, dann induziert das eine Spaltung von $\pi_E: TE \rightarrow E$ in Vertikal und Horizontal Bündel, d.h. es gilt

$$TE = T_vE \oplus T_hE, \quad \text{bzw.} \quad T_{\tilde{\zeta}}E = T_{\tilde{\zeta},v}E \oplus T_{\tilde{\zeta},h}E,$$

wobei $\tilde{\zeta} \in E$ sei und \oplus als topologische Summe im Sinne von Abschnitt 1.1.II gemeint ist. Darauf wollen wir näher eingehen. Betrachte die Abbildung

$$H \circ (\pi_E \oplus D\pi): TE \rightarrow TE.$$

Man mache sich klar, dass die Abbildung

$$P := H_p \circ (\pi_E \oplus D\pi)_{\tilde{\zeta}}: T_{\tilde{\zeta}}E \rightarrow T_{\tilde{\zeta}}E,$$

wobei $\pi(\tilde{\zeta}) = p$,

$$(\pi_E \oplus D\pi)_{\tilde{\zeta}}: T_{\tilde{\zeta}}E \rightarrow E_p \oplus T_pM$$

und

$$H_p: E_p \oplus T_pM \rightarrow (TE)_p$$

seien $(\pi \circ \pi_E: TE \rightarrow M)$ ist ein Faserbündel über M , in jeder Faser zur Abbildung

$$(x, e, b, e_1) \mapsto (x, e, b, B_{(U,\varphi)}(x)(b, e))$$

korrespondiert. Das zeigt, dass P ein wohldefiniertes Bild hat und ein linearer beschränkter Operator ist. Weiterhin erkennt man sofort, dass $P|_{T_{\tilde{\zeta},h}E} = \mathbb{1}_{T_{\tilde{\zeta},h}E}$ ist. D.h. $H \circ (\pi_E \oplus D\pi)$ ist eine glatte Abbildung, welche eingeschränkt auf $T_{\tilde{\zeta}}E$ eine stetige Projektion auf $T_{\tilde{\zeta},h}E$ ist. Das zeigt die obige Spaltung von TE .

Kommentar 1.3.66. Sei $H: E \oplus TM \oplus TE$ ein Zusammenhang auf $\pi: E \rightarrow M$. Wegen Kommentar 1.3.65 ist es klar, dass die Abbildung

$$d\pi_{\tilde{\zeta}}: T_{h,\tilde{\zeta}}E \rightarrow T_pM,$$

wobei $\pi(\xi) = p$ sei, ein toplinearer Isomorphismus ist.

Betrachte nochmals die Projektion

$$P := H \circ (\pi_E \oplus D\pi): TE \rightarrow T_h E.$$

Es ist klar, dass

$$K := \mathbb{1}_{TE} - P: TE \rightarrow T_v E$$

glatt ist und faserweise eine Projektion von $T_\xi E$ auf $T_{\xi,v} E$ definiert. In Kommentar 1.3.43 wurde gezeigt, dass es eine kanonische Isomorphie

$$T_{\xi,v} E \cong E_p$$

gibt, wobei $\pi(\xi) = p$ sei. Natürlich ist $T_v E \not\cong E$, aber mithilfe der obigen kanonischen Isomorphie können wir K wie folgt auffassen:

$$K: TE \rightarrow E,$$

wobei K das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{K} & E \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

kommutieren lässt. Es ist

$$K_\xi: T_{\xi,v} E \rightarrow E_p,$$

wobei $\pi(\xi) = p$ sei, ein toplinearer Isomorphismus.

$K: TE \rightarrow TM$ heißt die **Zusammenhangs-Abbildung** (in der Literatur nennt man diese Abbildung auch einen *Zusammenhang* auf $\pi: E \rightarrow M$).

Als nächstes wollen wir die lokale Beschreibung von K untersuchen. Sei (U, φ) eine Karte von M und

$$\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E$$

eine Bündelkarte von $\pi: E \rightarrow M$ im Sinne von Kommentar 1.3.28. Dann lautet die lokale Darstellung von K

$$D\varphi \circ K \circ (D\phi)^{-1}(x, e, b, e_1) = (x, e_1 + B_{(U,\varphi)}(x)(b, e)).$$

Mithilfe von K möchten wir nun eine kovariante Ableitung auf $\pi: E \rightarrow M$ definieren.

Definition 1.3.67. Sei $p: E \rightarrow M$ ein E -Bündel und $\pi: TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel von M . Wir nennen eine bilineare Abbildung

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E), \quad (X, S) \mapsto \nabla_X S$$

eine **kovariante Ableitung** auf $p: E \rightarrow M$, wenn ∇ folgende beiden Bedingungen erfüllt:

(a) Betrachte $\mathfrak{X}(M)$ als $\mathcal{E}(M)$ -Modul. ∇ ist $\mathcal{E}(M)$ -linear im ersten Argument.

(b) Für $f \in \mathcal{E}(M)$, $S \in \Gamma(M, E)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\nabla_X(f \cdot S) = \mathcal{L}_X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S,$$

wobei $\mathcal{L}_X(f)$ die Lie-Ableitung von f nach X sei.

Wenn $p: E \rightarrow M$ gleich dem Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$ ist, dann sagen wir, dass ∇ **symmetrisch** ist, wenn ∇ zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

(c) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

wobei $[X, Y]$ die Lie-Klammer von X und Y sei.

Satz 1.3.68. Sei $H: E \oplus TM \rightarrow TE$ ein Zusammenhang auf einem E -Bündel $p: E \rightarrow M$ und $K: TE \rightarrow TM$ die Zusammenhangs-Abbildung. Dann ist die glatte Abbildung

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E), \quad (X, S) \mapsto K \circ dX \circ S$$

eine kovariante Ableitung auf $p: E \rightarrow M$. Wenn $p: E \rightarrow M$ das Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$ ist und H symmetrisch ist, dann ist ∇ symmetrisch.

Einen Beweis für Satz 1.3.68 findet man in [Lan99, VIII, §2, Theorem 2.1].

Kommentar 1.3.69. Eine unmittelbare Folgerung des obigen Satzes ist, dass jeder Spray $X \in \mathfrak{X}(TM)$ eine kovariante Ableitung induziert.

Wir möchten nur eine lokale Beschreibung der kovarianten Ableitung eines Sprays geben: Sei (U, φ) eine Karte von M und $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times E$ eine Bündelkarte von $p: E \rightarrow M$ im Sinne von Kommentar 1.3.28. Setze

$$\Sigma := \text{pr}_E \circ \phi \circ (S|U) \circ \varphi^{-1} \quad \text{und} \quad \zeta := \text{pr}_B \circ D\phi \circ (X|U) \circ \varphi^{-1}.$$

Dann gilt

$$\text{pr}_E \circ \phi \circ (\nabla_X S|U) \varphi^{-1}(x) = d\Sigma_x \zeta(x) - B_{(U, \varphi)}(x)(\zeta(x), \Sigma(x)),$$

wobei $B_{(U, \varphi)}$ aus dem Zusammenhang $H: E \oplus TM \rightarrow TE$ kommen.

Wir haben bereits gesehen, dass die symmetrischen Zusammenhänge auf $\pi: TM \rightarrow M$ in einer 1 zu 1 Korrespondenz zu den Sprays stehen. Die nächste Frage ist nun sehr natürlich: Stehen die symmetrischen Zusammenhänge in einer 1 zu 1 Korrespondenz zu den symmetrischen kovarianten Ableitungen?

Theorem 1.3.70. Sei $\dim M < \infty$, d.h. $B = \mathbb{R}^n$ und sei ∇ eine symmetrische kovariante Ableitung auf $\pi: TM \rightarrow M$. Für eine Karte (U, φ) von M und Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ seien

$$\zeta := \text{pr}_{\mathbb{R}^n} \circ D\varphi \circ (X|U) \circ \varphi^{-1}, \quad \eta := \text{pr}_{\mathbb{R}^n} \circ D\varphi \circ (Y|U) \circ \varphi^{-1}$$

und

$$\nabla_{\zeta}\eta := \text{pr}_{\mathbb{R}^n} \circ D\varphi \circ (\nabla_X Y|U) \circ \varphi^{-1}.$$

Für $x \in \varphi(U)$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ wähle Vektorfelder X, Y mit $\zeta(x) = v$ und $\eta(x) = w$. Dann ist die Abbildung

$$B_{(U, \varphi)}(x)(v, w) := d\eta_x \zeta(x) - \nabla_{\zeta}\eta(x)$$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von den Fortsetzungen X, Y von v, w , und bilinear. Für einen Atlas \mathfrak{A} von M transformiert sich die Familie $(B_{(U, \varphi)})_{(U, \varphi) \in \mathfrak{A}}$ gemäß Gleichung (Δ) .

Für einen Beweis von Theorem 1.3.70 vgl. [Lan99, VIII, §3, Lemma 2.3, Theorem 2.4].

Kommentar 1.3.71. Theorem 1.3.70 sagt also aus, dass Zusammenhänge und kovariante Ableitungen für endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten in einer 1 zu 1 Korrespondenz stehen. Der Mathematiker Serge Lang bemerkt an dieser Stelle, dass es im unendlich-dimensionalen Fall oft auftritt, dass natürliche kovariante Ableitungen von einem Spray kommen, d.h. die Familie von Bilinearformen $(B_{(U, \varphi)})$ (und ihr Transformationsverhalten unter Kartenwechsel) hat in der Regel nicht weniger geometrische Informationen kodiert als eine kovariante Ableitung.

Theorem 1.3.72. Sei (M, g) eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutige symmetrische kovariante Ableitung ∇ auf dem Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$, die $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ die Gleichung

$$\mathcal{L}_Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

erfüllt. Man nennt ∇ den **Levi-Cevita Zusammenhang**.

Kommentar 1.3.73. Mit dem bisher gezeigten ist es klar, dass der Levi-Cevita Zusammenhang nun einen symmetrischen Zusammenhang $H: TM \oplus TM \rightarrow T^2M$, eine Zusammenhangs-Abbildung $K: T^2M \rightarrow TM$ und einen Spray $X \in \mathfrak{X}(TM)$ induziert. Die zu einer Karte (U, φ) assoziierte Bilinearform $B_{(U, \varphi)}$ entspricht den bekannten **Christoffel-Symbolen**; genauer:

$$-B_{(U, \varphi)}(x)(e_i, e_j) = (\Gamma_{ij}^k)_{k=1, \dots, n}.$$

Der Zusammenhang H liefert eine Aufspaltung von T^2M in Horizontal und Vertikal Bündel. Die Abbildungen

$$K_{\zeta}: T_{\zeta, v}TM \rightarrow T_pM \quad \text{und} \quad d\pi_{\zeta}: T_{\zeta, h}TM \rightarrow T_pM$$

sind lineare Isomorphismen. Weiterhin induziert der Spray X eine Exponentialabbildung

$$\exp: \mathcal{O} \rightarrow M,$$

die wir die **riemannsche Exponentialabbildung** nennen. Für die Exponentialabbildung gilt nun folgendes

Lemma 1.3.74. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\exp: \mathcal{O} \rightarrow M$, die auf einer offenen Umgebung $\mathcal{O} \subseteq_o TM$ des Nullschnittes definiert ist. Dann existiert eine offene Umgebung des Nullschnittes $\mathcal{D} \subseteq_o \mathcal{O}$, so dass*

$$\pi \times \exp: \mathcal{D} \rightarrow M \times M$$

ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge der Diagonale von $M \times M$ ist.

Wir wollen die kovariante Ableitung auf einem Rückzugbündel zurückziehen. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Banach-Bündel mit Zusammenhangs-Abbildung $K_\pi: TE \rightarrow M$ und $h: I \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, wobei $\dim I = 1$ ist. Das Rückzugbündel $h^*\pi: h^*E \rightarrow I$ vererbt nun einen Zusammenhang $K_{h^*\pi}$ implizit durch das nächste Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Th^*E & \xrightarrow{d\pi^*h} & TE \\ K_{h^*\pi} \downarrow & & \downarrow K_\pi \\ h^*E & \xrightarrow{\pi^*h} & E. \end{array}$$

Man rechnet nach, dass in lokalen Koordinaten die Beschreibung

$$K_{h^*\pi}^{\text{loc}}(x, e_1, m, e_2) = \left(x, e_2 + \frac{\text{loc}}{\pi} \Gamma_x(d(h^{\text{loc}})_x m, e_1) \right)$$

gilt. Wenn $\pi: E \rightarrow M$ eine Bündel-Metrik g besitzt, dann können wir diese auf $h^*\pi: h^*E \rightarrow I$ zurückholen. Diese Metrik nennen wir dann h^*g .

Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\partial t \in \Gamma(I, TI)$ das kanonische Tangentialfeld, d.h. der Hauptteil von $\partial t(t_0)$ ist gleich 1 für alle $t_0 \in I$. Für einen glatten Schnitt $X \in \Gamma(I, h^*(E))$ definieren wir die kovariante Ableitung durch

$$\nabla_t X := K_{h^*\pi} \circ dX \circ \partial t.$$

Es bezeichne X_t^{loc} den Hauptteil der lokalen Darstellung von $X_t \in T_{h(t)}E$. Dann rechnet man in lokalen Koordinaten nach, dass

$$(\nabla_t X)^{\text{loc}}(t) = K_{h^*\pi}^{\text{loc}}(t, X_t^{\text{loc}}, 1, \dot{X}_t^{\text{loc}}) = \left(t, \dot{X}_t^{\text{loc}} + \frac{\text{loc}}{\pi} \Gamma_x(\dot{h}^{\text{loc}}(t), \dot{X}_t^{\text{loc}}) \right)$$

gilt. Es gibt Autoren die anstatt $\nabla_t X$ auch $\nabla_h X$, ∇X , ∂X oder nur \dot{X} schreiben. Um keine Verwirrung zu stiften benutzen wir hier nur die Schreibweise $\nabla_t X$.

1.4. Eine Sobolev Mannigfaltigkeit

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Banach-Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) einzuführen. Das soll anschaulich folgender Raum sein: Die Elemente $c \in \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ sollen stetige Kurven von x nach y sein, so dass die Ableitung \dot{c} fast überall existiert mit der zusätzlichen Eigenschaft $\int g_c(\dot{c}, \dot{c}) < \infty$. Das \mathcal{P} steht für „path“. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ der Modellraum ist, wobei das der Sobolev Raum der L^2 -Funktionen mit einer schwachen Ableitung in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ sein soll.

Im ersten Abschnitt wiederholen wir ein paar grundlegende Sätze über den Sobolevraum $H^1(\mathbb{R})$. Im zweiten Abschnitt führen wir den Sobolevraum $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ein, wobei wir eine Funktion darin als einen Schnitt im trivialen Bündel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ interpretieren. Im dritten Abschnitt zeigen wir, dass wir den Fall nicht-trivialer Bündel auf den Fall trivialer Bündel zurückziehen können (wir geben sogar einen isometrischen Isomorphismus an, der mit der kovarianten Ableitung kommutiert). In den letzten beiden Abschnitten definieren wir schließlich die Sobolev Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und studieren anschließend ein L^2 -Hilbert-Bündel darüber.

Für die nächste Motivation setzen wir voraus, dass die klassische Theorie der Sobolev Räume dem Leser bekannt ist.

Motivation. Wir werden im Folgenden versuchen die nächsten Fragen zu beantworten:

- Wofür brauchen wir $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ in der Morse-Homologie?
- Was bedeutet das $\overline{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$?
- Gibt es einen intuitiven Kandidaten für einen Atlas von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$?

Zur Motivation von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$: Im Vorwort haben wir erklärt, dass wir der Menge aller Integralkurven des Vektorfeldes $-\text{grad } f$, wobei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion sei, die Struktur einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit geben wollen. Als nächstes stellen wir eine „richtige“ Idee mit einer „falschen“ Umsetzung vor: Betrachte die Abbildung

$$F: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}, M), \quad c \mapsto \dot{c} + \text{grad } f \circ c,$$

wobei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion sei. Fixiere zwei kritische Punkte x, y von f und schränke dann F auf die Teilmenge aller glatten Kurven von x nach y ein. Man sieht nun leicht: c ist ein Instanton von x nach y genau dann, wenn $F(c) = 0$ ist. Hätte man einen impliziten Funktionensatz für F zur Verfügung, dann könnte man dem Trajektorienraum die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit geben. Folgende Probleme treten nun auf: $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ ist eine sogenannte Fréchet-Mannigfaltigkeit. Diese sind schwieriger als Banach-Mannigfaltigkeit zu handhaben. Alleine den Satz über implizite Funktionen zu formulieren, das sogenannte Nash-Moser Theorem, ist enorm

aufwendig (dieser gilt nämlich nur für sogenannte zahme Fréchet-Mannigfaltigkeiten, die besondere Strukturen aufweisen müssen).

Wir werden am Ende von diesem Abschnitt sehen, dass wenn wir den Definitionsbereich des obigen F auf die Sobolev Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ erweitern, dass dann die Erweiterung von F eine glatte Abbildung wird.

Zum Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}$: Das Problem an unserer speziellen Situation ist, dass \mathbb{R} kein kompakter Raum ist. $\overline{\mathbb{R}}$ ist definiert als $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, d.h. $\overline{\mathbb{R}}$ wird die differenzierbare Struktur eines kompakten Intervalls gegeben. Später werden wir das sogenannte ω -Lemma zeigen. Das besagt, dass wenn $\pi: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\rho: F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Vektorbündel sind, $f: E \rightarrow F$ eine glatte Bündel-Abbildung ist, d.h. $f(E_t) \subseteq F_t$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}$, dass dann für jeden Sobolevschnitt $s \in \Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, E)$ die Verknüpfung $f \circ s$ wieder ein Sobolevschnitt ist, d.h. $f \circ s \in \Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, F)$ (daher auch der Name ω -Lemma; man hängt hinten etwas dran). Ohne die Kompaktheit von $\overline{\mathbb{R}}$ können wir dieses wichtige Lemma nicht zeigen. Denn darauf fundiert nachher die Aussage, dass die Kartenübergänge von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ \mathcal{C}^∞ -Fréchet-differenzierbar sind. Interessanterweise betrachten wir also einen kompakten topologischen Raum, der ein nicht-endliches Maß besitzt.

Zum Atlas: Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Angenommen es sei gezeigt, dass $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ eine Banach-Mannigfaltigkeit ist, so dass jede Kurve $\gamma \in \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ stetig ist und eine fast überall definierte schwache Ableitung $\dot{\gamma}$ besitzt mit $\int g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < \infty$. Wir möchten nun einen kanonischen Kandidaten für den Modellraum von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ finden. Allgemein gilt, dass der (lokale) Modellraum einer Banach-Mannigfaltigkeit isomorph zum Tangentialraum an einem Punkt sein muss. Wir haben bereits in Kommentar 1.3.17 diskutiert, dass man einen Tangentialvektor als eine Äquivalenzklasse von Kurven sehen kann. Betrachte also eine Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ mit $\alpha(0) = h$. Man kann α kanonisch als die Abbildung

$$\tilde{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M, \quad \tilde{\alpha}(t, \tau) = \alpha(t)(\tau)$$

sehen. Wir halten nun ein $\tau \in \overline{\mathbb{R}}$ fest und lassen $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ laufen. Dann ist

$$\beta_\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \quad t \mapsto \alpha(t)(\tau)$$

eine Kurve in M , die durch $h(\tau)$ läuft (Auswerten an einem Punkt ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit an h möglich). Ableiten nach t ist wegen der vorausgesetzten Glattheit an α möglich und damit gilt $\dot{\beta}_\tau(0) \in T_{h(\tau)}M$ für alle $\tau \in M$. Damit ist der Tangentialvektor $\dot{\alpha}$ ein Schnitt in $h^*(TM)$. Da wir nach t und nicht nach τ differenzieren haben, ist es anschaulich klar, dass $\dot{\alpha}(0)$ ein Sobolevschnitt sein muss. Man erkennt deshalb die Gleichheit

$$\begin{aligned} T_h \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) &= \Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, h^*(TM)) \\ &:= \left\{ X \in \Gamma(\overline{\mathbb{R}}, h^*(TM)) \mid \int g_h(X, X) < \infty \text{ und } \int g_h(\nabla_t X, \nabla_t X) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Da (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist, steht uns eine riemannsche Exponentialabbildung $\exp: TM \rightarrow M$ zur Verfügung. Diese induziert lokale Koordinatensysteme (das Inverse einer Karte), indem man die Abbildung

$$\exp_*: \Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, h^*(TM)) \rightarrow \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M), \quad X \mapsto \exp_h X \quad \text{mit} \quad (\exp_h X)(t) = \exp_{h(t)} X(t)$$

betrachtet. Damit haben wir einen intuitiven Kandidaten für einen Atlas von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$. Wir müssen also zuerst die Sobolev Schnitträume $\Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, TM)$ definieren und verstehen, bevor wir eine glatte Struktur von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ erklären können.

I. Klassische Theorie

In diesen Abschnitt ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$.

Definition 1.4.1. Mit $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ bezeichnen wir den Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ (bzw. deren Äquivalenzklassen).

Mit $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ bezeichnen wir den Vektorraum der lokal integrierbaren Funktionen, d.h. $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ genau dann, wenn $\forall \Omega' \Subset \Omega$ gilt

$$\int_{\Omega'} f(x) dx < \infty.$$

Indem man Funktionen identifiziert, die bis auf einer Nullmenge übereinstimmen, erhält man den Raum $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Wir nennen eine glatte Funktionen $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ **Testfunktion**, wenn der Träger

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{t \in \Omega \mid \varphi(t) \neq 0\}}$$

kompakt ist. Den Vektorraum (!) aller Testfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.⁶

Wir sagen $g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ist **schwache Ableitung** von $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, falls für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ die Gleichung

$$\langle f, \dot{\varphi} \rangle_{L^2} = (-1) \cdot \langle g, \varphi \rangle_{L^2} \quad (*)$$

gilt. Anstatt g schreibt man auch \dot{f} .

Kommentar 1.4.2. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $L^2(\Omega) \subseteq L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ist.

Falls $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ dann ist es klar, dass $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, die Produkte $f \cdot \dot{\varphi}, \dot{f} \cdot \varphi \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ sind, und es ist nicht schwer zu sehen, dass sie die Gleichung (*) erfüllen.

Falls $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Ableitung $g \in L^2(\Omega)$ besitzt, dann ist die bereits eindeutig bestimmt. Das folgt aus folgenden

⁶In der Literatur ist auch die Bezeichnung $\mathcal{D}(\Omega)$ für $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ üblich. Genauer wird damit der Raum $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit einem System von Halbnormen bezeichnet. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist dann ein sogenannter Fréchetraum. Man kann auch auf $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ein System von Halbnormen angeben, so dass $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ein Fréchetraum wird. Da wir diese Strukturen nicht benötigen und die Definition eines Fréchetraumes sehr technisch ist, haben wir sie nicht eingeführt.

Lemma 1.4.3. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Angenommen $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2} = 0.$$

Dann gilt $f = 0$.

Beweis. Das nächste Resultat ist nicht so einfach zu sehen und wir nun vorausgesetzt:

Satz. Für $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$ liegt die Menge $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$.

Einen Beweis findet man in [Wero7] (dort wird eine Lösung via Faltung mit Dirac-Kernen als Übungsaufgabe gestellt).

Mithilfe des obigen Satzes ist der Beweis nun sehr einfach. Zu $f \in L^2(\Omega)$ betrachte $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$. Damit gilt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f - \varphi_n + \varphi_n \rangle_{L^2} = \underbrace{\langle f, \varphi_n \rangle_{L^2}}_{=0} + \langle f, f - \varphi_n \rangle_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|f - \varphi_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Was $\|f\|_{L^2} = 0$ zeigt. □

Definition 1.4.4. Wir setzen

$$H^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) \mid f \text{ besitzt eine schwache Ableitung}\}.$$

Den obigen Vektorraum (!) nennen wir den **Sobolevraum** der quadratintegrierbaren Funktionen mit einer schwachen Ableitung. Ein Skalarprodukt wird definiert durch

$$\langle f, g \rangle_{H^1} := \langle f, g \rangle_{L^2} + \langle \dot{f}, \dot{g} \rangle_{L^2}.$$

Weiterhin setzen wir

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)},$$

wobei der Abschluss bzgl. der H^1 -Norm gebildet wird.

Kommentar 1.4.5. Wenn man voraussetzt, dass $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ vollständig ist, dann ist es eine einfache Übungsaufgabe zu zeigen, dass $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ ein Hilbertraum ist. Für die Vollständigkeit bemerken wir nur, dass jede H^1 -Cauchyfolge automatisch eine L^2 -Cauchyfolge ist. Weiterhin ist es klar, dass $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum ist. Anschaulich gesprochen, ist $H_0^1(\Omega)$ der Unterraum von $H^1(\Omega)$, der auf den Rand von Ω verschwindet. Für $\Omega = \mathbb{R}$ stimmen übrigens $H_0^1(\Omega)$ mit $H^1(\Omega)$ überein (ohne Beweis).

Für $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{C}_b^0(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^0 \mid u \text{ ist beschränkt auf } \Omega\}$$

der Raum aller beschränkten stetigen Funktionen. $\mathcal{C}_b^0(\Omega)$ ist mit der Supremumsnorm ein Banachraum. Wenn $\Omega \Subset \mathbb{R}$ ist, dann gilt natürlich $\mathcal{C}_b^0(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega)$. Die nächsten beide Sätze liegen tief in der Theorie.

Satz 1.4.6 (Lemma von Sobolev). Sei $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$. Es existiert ein $C = C(\Omega) > 0$, so dass für alle $f \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|f\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_{H^1}.$$

Mit anderen Worten gibt es eine beschränkte lineare Inklusion

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^0(\Omega).$$

Insbesondere besitzt jede H^1 -Funktion einen beschränkten stetigen Repräsentanten.

Satz 1.4.7 (Rellichscher Einbettungssatz). Sei $\Omega \Subset_o \mathbb{R}$. Dann ist die Inklusion

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

ein kompakter Operator.

Einen Beweis für das Lemma von Sobolev findet man im Adams [AF05, 5.4] und einen Beweis für den Rellichschen Einbettungssatz findet man im Werner [Wero7, V.2.12, V.2.13]. Als Konsequenz des Sobolev-Lemmas zeigen wir, dass Produkte von H^1 -Funktionen wieder H^1 -Funktionen sind.

Lemma 1.4.8 (Produktregel). Sei $s, h \in H^1(\mathbb{R})$. Dann ist das Produkt $s \cdot h \in H^1(\mathbb{R})$ und für die schwache Ableitung gilt

$$\frac{d}{dt}(s \cdot h) = \dot{s} \cdot h + s \cdot \dot{h}.$$

Beweis. Wegen dem Lemma von Sobolev 1.4.6 ist $\sup_{t \in \mathbb{R}} |s(t)| < \infty$ und analog für h . Damit folgt $s \cdot h \in L^2(\mathbb{R})$ und $(\dot{s} \cdot h + s \cdot \dot{h}) \in L^2(\mathbb{R})$.

Nun zeigt man zuerst folgende schwächere Aussage: Für $s \in H^1(\mathbb{R})$ und $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ist $s \cdot \phi \in H^1(\mathbb{R})$ und $\frac{d}{dt}(s \cdot \phi) = \dot{s} \cdot \phi + s \cdot \dot{\phi}$. Diese Behauptung ist eine sehr einfache Übungsaufgabe in [Wero7].

In [AF05, Thm. 3.28] zeigt man, dass es ein Folge $(\phi_n) \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gibt, die gegen h bzgl. der H^1 -Norm konvergiert, d.h. (ϕ_n) konvergiert gegen h in L^2 und $(\dot{\phi}_n)$ gegen \dot{h} . Damit rechnet man

$$\begin{aligned} \langle s \cdot h, \dot{\phi} \rangle_{L^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s \cdot \phi_n, \dot{\phi} \rangle_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \cdot \langle \dot{s} \cdot \phi_n + s \cdot \dot{\phi}_n, \phi \rangle_{L^2} \\ &= (-1) \cdot \langle \dot{s} \cdot h + s \cdot \dot{h}, \phi \rangle_{L^2} \quad \square \end{aligned}$$

Motivation. Unser Ziel ist es, das Objekt „ $H^1(\Omega, M)$ “ zu definieren, wobei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist. In [Kli76] wird das über die absolutstetigen Funktionen erklärt. Um später sehen zu können wieso man das machen kann, möchten wir kurz den Zusammenhang zwischen absolutstetigen Funktionen und H^1 -Funktionen klären.

Im Grunde genommen benötigen wir nicht die elementare Definition von absolutstetigen Funktionen. Wir geben sie aber dennoch zur Vollständigkeit an.

Definition. Eine Funktion heißt **absolutstetig** auf $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$ die nächste Implikation gilt:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Die absolutstetigen Funktionen sind gerade die Funktionen für die man den *Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung* formulieren kann. Das ist auch die richtige Anschauung, die man von ihnen haben sollte. Die unten stehende Version findet man im Werner [Wero7, A.1.10]. Wir zitieren diesen Satz ohne Beweis.

Theorem 1.4.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

(a) Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ absolutstetig, so existiert die Ableitung \dot{f} fast überall, \dot{f} ist über kompakte Teilintervalle von Ω integrierbar, und es gilt

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t) dt \quad \forall a, b \in \Omega.$$

(Dabei sei $\int_a^b = -\int_b^a$ für $a > b$.)

(b) Ist $g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ über kompakte Teilintervalle integrierbar, $a \in \Omega$ beliebig und $f(x) := \int_a^x g(t) dt$, so ist f absolutstetig, \dot{f} existiert fast überall, und es gilt $\dot{f} = g$ fast überall.

Proposition 1.4.10. Sei $\Omega \subseteq_o \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) Sei f absolutstetig, $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ und $\dot{f} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ (hier bezeichne \dot{f} die fast überall definierte Ableitung). Dann gilt $f \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und die schwache Ableitung von f stimmt mit \dot{f} überein.

(ii) Sei $f \in H^1(\Omega)$ und es bezeichne f gleichzeitig einen stetigen Vertreter dieser Äquivalenzklasse (für die Existenz davon vgl. das Lemma von Sobolev). Wenn \dot{f} die schwache Ableitung von f bezeichne, dann gilt

$$f(t) - f(s) = \int_s^t \dot{f}(x) dx.$$

Insbesondere hat f nach Satz 1.4.9 einen absolutstetigen Repräsentanten und die schwache Ableitung kann fast überall als Limes eines Differenzenquotienten von f realisiert werden.

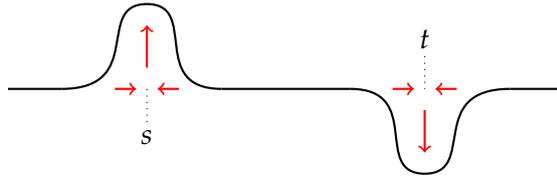


Abbildung 1.2.: Skizze von $\dot{\varphi}_n(x)$.

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

Zu (i): Sei $\Omega' \Subset \Omega$. Es ist zu zeigen, dass auf $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega'})$ und $\dot{f} \in L^2(\Omega')$, $f \in H^1(\Omega')$ folgt. Aus $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega'})$ folgt $L^2(\Omega')$. Wir müssen nur noch verifizieren, dass \dot{f} die Gleichung (*) erfüllt. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega')$. Für absolutstetige Funktionen gilt die Produktregel. Dann gilt für fast überall $t \in \Omega$

$$\frac{d}{dt}(f \cdot \varphi)(t) = \dot{f}(t)\varphi(t) + f(t)\dot{\varphi}(t).$$

Integration über Ω' liefert nun die Behauptung.

Zu (ii): Betrachte die Funktion

$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und setzt $\psi_r(x) := \frac{\psi(x/r)}{r}$. Betrachte nun den Friedrichschen Glättungsoperator von ψ_r , d.i. der Operator

$$L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), h \mapsto h * \psi_r, \quad h * \psi_r(y) := \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \psi_r(y-x) dx.$$

Für beschränkte stetige Funktionen h konvergiert $h * \psi_r$ gleichmäßig gegen h für $r \rightarrow 0$ (vgl. [Kö04, 15.5]). Indem man $h \in H^1(\Omega)$ abschneidet und dann stetig auf ganz \mathbb{R} zu \hat{h} fortsetzt, konvergiert wegen Satz 1.4.6 auch $\hat{h} * \psi_r$ punktweise gegen \hat{h} . Wähle also

$$\dot{\varphi}_n(x) := \psi_{1/n}(s-x) - \psi_{1/n}(t-x).$$

Diese Funktion ist in Abbildung 1.2 skizziert. Die roten Pfeile deuten dabei an was im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ passiert. Man kann eine Stammfunktion-Folge $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ so wählen, dass diese gegen die charakteristische Funktion vom Intervall $[s, t]$ punktweise konvergiert. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_s^t \dot{f}(x) dx &\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{\substack{\varphi_n \text{ ist reell} \\ n \rightarrow \infty}} \int_{\mathbb{R}} \dot{f}(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\dot{\varphi}_n(x)} dx \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \psi_{1/n}(s) - f * \psi_{1/n}(t)) = f(t) - f(s), \end{aligned}$$

wobei wir zwischendurch f durch ein geeignetes \hat{h} ersetzt haben. □

II. Triviale Bündel mit trivialer Metrik

Motivation. In diesen Abschnitt wollen wir die Räume $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ und $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ definieren. Es wird sich als zweckmäßig herausstellen, dass wir etwas allgemeiner als in [Sch93] anstatt \mathbb{K}^n einen abstrakten \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt betrachten. Man soll im Hinterkopf haben, dass man eine Funktion in $L^2(\mathbb{R}, V)$ bzw. $H^1(\mathbb{R}, V)$ kanonisch als einen Schnitt im trivialen Bündel $\mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (mit trivialer Bündel-Metrik) auffassen kann.

Definition 1.4.11. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer \mathbb{K} -Vektorraum, d.h. $\dim V < \infty$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V . Unter einer messbaren Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow V$ verstehen wir, d.h. $f^{-1}(U)$ Borel-messbar sein muss $\forall U \subseteq_o V$ (mit der euklidischen Topologie). Wir definieren

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, V) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow V \text{ messbar} \mid \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), f(t) \rangle dt < \infty \right\}$$

und teilen den Unterraum $\mathcal{N} := \{f = 0 \text{ f. ü.}\}$ (bzgl. des Borel-Lebesguemaßes auf \mathbb{R}) raus und erhalten so den Raum $L^2(\mathbb{R}, V)$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), g(t) \rangle \quad \text{für } f, g \in L^2(\mathbb{R}, V).$$

Völlig analog wie im eindimensionalen Fall $V = \mathbb{K}$ definiert man den Raum der Testfunktionen $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, V)$ und die schwache Ableitung. Damit definiert man

$$H^1(\mathbb{R}, V) := \{f \in L^2(\mathbb{R}, V) \mid \exists \text{ schwache Ableitung } \dot{f} \in L^2(\mathbb{R}, V)\}.$$

Ein Skalarprodukt wird definiert durch

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), g(t) \rangle + \langle \dot{f}(t), \dot{g}(t) \rangle dt \quad \text{für } f, g \in H^1(\mathbb{R}, V).$$

Beispiel 1.4.12. Sei $V = \mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Dann ist es nicht schwer zu sehen, dass für $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$ folgende alternative Beschreibung gilt:

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n) = \{f = (f_1, \dots, f_n) \mid f_i \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})\} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{S}(\mathbb{R}). \quad (*)$$

Das zeigt insbesondere die Vollständigkeit der Räume $(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}})$.

Beispiel 1.4.13. Auf $V = \text{Mat}_n \mathbb{K}$ ist das **Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt** durch

$$\langle A, B \rangle := \text{Spur}({}^*A \cdot B) \quad \text{für } A, B \in \text{Mat}_n \mathbb{K}$$

definiert, wobei ${}^*A := {}^t\bar{A}$ ist und $\text{Spur}(C) := \sum_{i=1}^n c_{ii}$ für $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_n \mathbb{K}$. Wir werden bald ohne Mühe sehen, dass für $\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \text{Mat}_n \mathbb{K})$ auch die Gleichung (*) gilt.

Wenn man $\text{Mat}_n \mathbb{K} = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ auffasst, dann werden wir später sehen, dass wir die (stetige) Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, \text{Mat}_n \mathbb{K}) \hookrightarrow L(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)), \quad A \mapsto A_*$$

haben, wobei $(A_*s)(t) := A_t s(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ repräsentantenweise definiert sei.

Beispiel 1.4.14. Das obige Beispiel lässt sich verallgemeinern. Sei $n, \nu \in \mathbb{N}$ und W ein euklidischer \mathbb{K} -Vektorraum. Betrachte den \mathbb{K} -Vektorraum $V := L^\nu(\mathbb{K}^n, W)$ (vgl. Definition 1.1.33; für $\nu = 1$ und $W = \mathbb{K}^n$ haben wir das obige Beispiel). Das **verallgemeinerte Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt** ist gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i_1, \dots, i_\nu=1}^n \langle f(e_{i_1}, \dots, e_{i_\nu}), g(e_{i_1}, \dots, e_{i_\nu}) \rangle_{W'}$$

wobei $f, g \in V$ und $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ die kanonische Basis von \mathbb{K}^n sei. Mit vollständiger Induktion über ν kann man zeigen: Sei $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ eine weitere Orthonormal-Basis von \mathbb{K}^n . Dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_\nu=1}^n \langle f(v_{i_1}, \dots, v_{i_\nu}), g(v_{i_1}, \dots, v_{i_\nu}) \rangle_{W'}$$

Analog wie im vorherigen Beispiel werden wir später die (stetige) Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, L^\nu(\mathbb{K}^n, W)) \hookrightarrow L^\nu(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, W)), \quad A \mapsto A_*$$

zeigen, wobei $(A_*(s_1, \dots, s_\nu))(t) := A_t(s_1(t), \dots, s_\nu(t))$ ist.

Proposition 1.4.15. Sei $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$, V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n$. Dann ist der Raum $\mathfrak{S}(\mathbb{R}, V)$ isometrisch isomorph zu $\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$, wobei \mathbb{K}^n das kanonische Skalarprodukt trägt.

Beweis. Wähle eine orthonormale Basis $(v_k)_{k=1, \dots, n}$ von V und definiere den linearen Isomorphismus $\Phi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch $\Phi(v_k) := e_k$, wobei e_k der k -te kanonische Basisvektor von \mathbb{K}^n ist. Die Abbildung

$$\Phi_*: \mathfrak{S}(\mathbb{R}, V) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \quad \Phi_*s := \Phi \circ s$$

ist die gewünschte Isometrie. □

Kommentar 1.4.16. Die Notation Φ_* im obigen Beweis deutet bereits an, dass man \mathfrak{S} als einen kovarianten Funktor auffassen kann. Wir werden den funktoriellen Standpunkt in Kommentar 1.4.31 präzisieren.

Wir möchten noch anmerken, dass man das Φ_* vom obigen Beweis in mehreren ähnlichen Situationen benutzen kann. Wir möchten hier zwei Beispiele angeben: Sei

$\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, V)$ der Raum der stetigen beschränkten Abbildung mit der Supremumsnorm und sei

$$\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, V) := \{s \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, V) \mid s, \dot{s} \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, V)\}$$

mit der Norm

$$\|s\|_{\mathcal{C}_b^1} := \max\{\|s\|_\infty, \|\dot{s}\|_\infty\}.$$

Dann definiert die induzierte Abbildung

$$\Phi_*^{(0)}: \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, V) \rightarrow \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \quad \Phi_*^{(0)}s := \Phi \circ s$$

einen isometrischen Isomorphismus zwischen Banachräume. Analog hat man einen isometrischen Isomorphismus

$$\Phi_*^{(1)}: \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, V) \rightarrow \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \quad \Phi_*^{(1)}s := \Phi \circ s$$

der zusammen mit $\Phi_*^{(0)}$ folgende Rechenregel erfüllt: $\frac{d}{dt}\Phi_*^{(1)}s = \Phi_*^{(0)}\dot{s}$ (folgt leicht aus der Kettenregel).

Motivation. Wir möchten die Technik aus [Eli67] nutzen um das Objekt „ $H^1(\mathbb{R}, M)$ “ konstruieren zu können. In diesem Artikel benutzt man wesentlich, dass die Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

eine stetige Abbildung zwischen „Banachräumen“ ist (vgl. Def. von „manifold model“ in [Eli67]). Natürlich ist $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ kein Banachraum. In [Sch93] umgeht man dieses Problem, indem man \mathbb{R} via den zwei Punkten $\pm\infty$ kompaktifizieren (es ist wichtig, dass wir \mathbb{R} nicht via S^1 kompaktifizieren, da wir keine geschlossenen Kurven betrachten möchten).

Definition 1.4.17. Mit $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir die Menge $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und versehen es mit einer glatten Struktur, so dass

$$h: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1], \quad t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Kommentar 1.4.18. Die differenzierbare Struktur von $\overline{\mathbb{R}}$ erweitert die bereits vorhandene Struktur von \mathbb{R} (das gilt, weil die Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ glatt ist, da $h|_{\mathbb{R}}$ glatt ist). Man soll sich aber $\overline{\mathbb{R}}$ *nicht* als kompakte Mannigfaltigkeit vorstellen, denn wir betrachten auf $\overline{\mathbb{R}}$ *nicht* das induzierte (endliche) Volumenmaß von der Mannigfaltigkeiten-Struktur, sondern das (induzierte) Borel-Lebesgue-Maß von \mathbb{R} (dieses Maß erhält man indem man \pm das Gewicht 0 gibt, und allgemein $\mu(A) := \mu(A \setminus \{\pm\})$ setzt, wobei $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ beliebig sei). Für diese Arbeit bedeutet das, dass wir nicht auf Resultate von [Kli76] und [Eli67]

verweisen können, da die Sätze dort über kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten mit induziertem Volumenmaß arbeiten.

Wieso wir \mathbb{R} via $\overline{\mathbb{R}}$ kompaktifizieren, haben wir bereits motiviert. In der Wahl von h liegt natürlich eine gewisse Willkür. Wir haben h absichtlich so gewählt, dass $\dot{h} \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. Tatsächlich ist die Wahl von h nicht ausgezeichnet und man kann z.B. auch $h(t) := t/(1 + |t|)$ wählen. Der Grund dafür (wie wir später sehen werden) liegt daran, dass $\dot{h} \in L^2(\mathbb{R})$ ist. Man kann z.B. nicht $h(t) = t/\sqrt[4]{1+t^2}$ wählen, da hier $\dot{h} \notin L^2(\mathbb{R})$ gilt.

Wir müssen nun einige technische Resultate beweisen, die keine tiefere Intuition in die Materie vermitteln. Im Grunde genommen beginnt hier der Beweis der Aussage, dass die Kartenübergänge von „ $H^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ “ glatt sind. In der nächsten Proposition geht essentiell ein, dass $\dot{h} \in L^2(\mathbb{R})$ ist.

Proposition 1.4.19. Sei $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}}, V)$ und es gelte $f(\pm\infty) = 0$. Dann gilt $(f|_{\mathbb{R}}) \in H^1(\mathbb{R}, V)$. Man schreibt auch naheliegenderweise $f \in H^1(\mathbb{R}, V)$.

Lemma 1.4.20. Für alle $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ existiert ein $c = c(f) > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die nächste Abschätzung gilt:

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{c}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Insbesondere muss notwendigerweise $\dot{f}(\pm\infty) = 0$ sein und es ist $\dot{f} \in L^2(\mathbb{R})$, selbst wenn $f(+\infty) \neq 0$ oder $f(-\infty) \neq 0$ ist.

Beweis (von Lemma 1.4.20). Wir folgen den Gedanken in [Sch93]. Wir setzen

$$c := \max_{\tau_0 \in [-1,1]} \left| \frac{d}{d\tau} (f \circ h^{-1})(\tau_0) \right|.$$

Weiterhin gilt

$$(\dot{h}|_{\mathbb{R}}) = \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung aus der Kettenregel:

$$|\dot{f}(t)| = \left| \frac{d}{d\tau} (f \circ h^{-1})(h(t)) \right| \cdot |\dot{h}(t)| \leq c \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}. \quad \square$$

Beweis (von Proposition 1.4.19). Wir folgen den Gedanken in [Sch93].

In Kommentar 1.4.16 wurde diskutiert, wieso man für $k = 0, 1$ einen isometrischen Isomorphismus

$$\Phi_*: \mathcal{C}_b^k(\overline{\mathbb{R}}, V) \rightarrow \mathcal{C}_b^k(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{K}^n)$$

hat, der mit der Ableitung „kommutiert“, d.h. $\frac{d}{dt} \Phi_*(s) = \Phi_*(\dot{s})$. Wir können also o.E. annehmen, dass $V = \mathbb{K}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ ist, wobei $f_i \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ ist. Weiterhin

können wir wegen Beispiel 1.4.12 annehmen, dass $n = 1$ ist. Wegen Lemma 1.4.20 ist $\dot{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Aus $f(\pm\infty) = 0$ und Lemma 1.4.20 folgern wir jetzt, dass $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ ist. Dafür zerlegen wir $\mathbb{R} = [-1, 1] \cup I$ mit $I := \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Da f stetig ist, ist es auf $[-1, 1]$ quadratintegrierbar. Wir zeigen noch, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass

$$|f(t)|^2 \leq \frac{c^2}{t^4} \quad \text{für } |t| \geq 1$$

ist (insbesondere zeigen wir sogar $f \in L^1(\mathbb{R})$, was wir aber nicht benötigen). Wegen der integrierbaren Majorante ist dann f auf \mathbb{R} quadratintegrierbar. Betrachte den Fall $t \leq -1$ und sei $t_0 < t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\stackrel{\text{Pro. 1.4.10}}{=} \left| \int_{t_0}^t \dot{f}(s) ds \right| \stackrel{\text{Lem. 1.4.20}}{\leq} \left| \int_{t_0}^t \frac{c}{(1+s^2)^{3/2}} ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{c}{|s|^3} ds \right| = c \cdot \left| \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2} \right|. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $t_0 \rightarrow -\infty$ liefert die gewünschte Ungleichung für $t \leq -1$. Analog zeigt man die Ungleichung für $t \geq 1$. \square

Proposition 1.4.21 (Mannigfaltigkeiten Modell). Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein euklidischer \mathbb{K} -Vektorraum und $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$.

(i) Die lineare Inklusion $H^1(\mathbb{R}, V) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, V)$ ist beschränkt.

(ii) Die Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, L(\mathbb{K}^n, V)) \hookrightarrow L(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, V)), \quad A \mapsto A_*$$

ist beschränkt, wobei $(A_*s)(t) := A_t(s(t))$ für $s \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ sei.

Beweis. Zu (i): O.E. sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wegen Proposition 1.4.15 und Kommentar 1.4.16 reicht es zu zeigen, dass die lineare Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$$

beschränkt ist. Wegen Gleichung (*) aus Beispiel 1.4.12 ist das äquivalent dazu, dass die lineare Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$$

beschränkt ist. Das Lemma von Sobolev (Satz 1.4.6) liefert ein $C > 0$, so dass $\forall f \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\|f\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_{H^1}$$

gilt. Es ist also nur noch die Stetigkeit von f in $\pm\infty$ zu zeigen. Der einzige Wert der für f in diesen Punkten in Frage kommt ist 0. Betrachte nun folgende Rechnung

$$\begin{aligned} |f^2(t) - f^2(s)| &= \left| \int_s^t \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=x} f^2(\tau) dx \right| \\ &= \left| \int_s^t 2\dot{f}(x) \cdot f(x) dx \right| \leq 2 \cdot \left(\int_s^t |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_s^t |\dot{f}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Angenommen $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existiert nicht, d.h. f divergiert in $+\infty$. Dann divergiert auch f^2 in $+\infty$. Wähle eine Folge (t_n) mit $t_n \rightarrow +\infty$. Mithilfe der der obigen Rechnung folgt, dass f^2 in $+\infty$ nicht divergiert. Damit folgt die Stetigkeit von f in $+\infty$. Aus Symmetriegründen folgt die Stetigkeit in $-\infty$.

Zu (ii): Auch hier können wir annehmen, dass $V = \mathbb{K}^m$ mit kanonischen Skalarprodukt ist. *Grund:* Der isometrische Isomorphismus aus Proposition 1.4.15 induziert einen isometrischen Isomorphismus

$$L(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, V)) \cong L(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^m)).$$

Mit denselben Gedanken wie in Kommentar 1.4.16 kann man einen isometrischen Isomorphismus $L(\mathbb{K}^n, V) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \text{Mat}_{m \times n} \mathbb{K}$ konstruieren. Dieser induziert einen weiteren isometrischen Isomorphismus

$$H^1(\mathbb{R}, L(\mathbb{K}^n, V)) \cong H^1(\mathbb{R}, \text{Mat}_{m \times n} \mathbb{K}).$$

Sei nun $\mathfrak{S} = L^2$. Wir zeigen zuerst, dass $A_* \in L(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^m))$ gilt. Das folgt aber unmittelbar aus (i), denn die Ungleichung

$$\|A_*s\|_{L^2} \leq \|A\|_\infty \|s\|_{L^2}$$

ist einfach zu sehen. Gesucht ist nun ein $C > 0$, so dass für alle $A \in H^1(\mathbb{R}, \text{Mat}_{m \times n} \mathbb{K})$ die Ungleichung

$$\|A_*\|_{L(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^m))} \leq C \cdot \|A\|_{H^1(\mathbb{R}, \text{Mat}_{m \times n} \mathbb{K})}$$

gilt. Sei $s \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ mit $\|s\|_{L^2} \leq 1$. Für fast alle $t \in \mathbb{R}$ betrachte folgende Rechnung

$$\begin{aligned} \|A_t s(t)\|_{\mathbb{K}^m} &\leq \|A_t\|_{L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)} \cdot \|s(t)\|_{\mathbb{K}^n} \\ &\leq \|A_t\|_{L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)} \cdot \|s(t)\|_{\mathbb{K}^n} \leq C \cdot \|A_t\|_{\text{Mat}_{m \times n} \mathbb{K}} \cdot \|s(t)\|_{\mathbb{K}^n}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind. Integration über \mathbb{R} liefert dann die gewünschte Ungleichung.

Sei $\mathfrak{S} = H^1$. Beachte, dass für $v, w \in \mathbb{K}^n$ die Ungleichung

$$\|v + w\|^2 \leq 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

aus $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle$ folgt. Damit rechnet man

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(A_*s) \right\|_{L^2}^2 &\stackrel{\text{Lem. 1.4.8}}{=} \|\dot{A}_*s + A_*\dot{s}\|_{L^2}^2 \leq 2(\|\dot{A}_*s\|_{L^2}^2 + \|A_*\dot{s}\|_{L^2}^2) \\ &\leq 2(\|\dot{A}\|_{L^2}^2 \|s\|_\infty^2 + \|A\|_\infty^2 \|\dot{s}\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Aus (i) folgt $\|s\|_\infty \leq C \cdot \|s\|_{H^1}$ bzw. $\|A\|_\infty \leq C \cdot \|A\|_{H^1}$, d.h. für die volle Norm erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|A_*s\|_{H^1} &\leq C \cdot \sqrt{2 \cdot \|\dot{A}\|_{L^2}^2 + 3 \cdot \|A\|_{H^1}^2} \cdot \|s\|_{H^1} \\ &\leq C \cdot \sqrt{5} \cdot \|A\|_{H^1} \cdot \|s\|_{H^1} \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Korollar 1.4.22. Sei $n, \nu \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$. Dann ist die Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, L^\nu(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)) \hookrightarrow L^\nu(\mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)), \quad A \mapsto A_*$$

stetig, wobei $(A_*(s_1, \dots, s_\nu))(t) := A_t(s_1(t), \dots, s_\nu(t))$ ist.

Beweis. Man benutze Proposition 1.4.21 mit $V := L^{\nu-1}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, wobei V das Skalarprodukt aus Beispiel 1.4.14 trägt. Mit einer einfachen Induktion über ν folgt die Behauptung. □

III. Nicht-triviale Bündel mit nicht-trivialer Metrik

Für den Rest dieses Abschnitts seien $\xi = (E, \pi, \overline{\mathbb{R}}, F)$ und $\eta = (E', \pi', \overline{\mathbb{R}}, F')$ stetige oder glatte Vektorbündel, F, F' endlich dimensionale Vektorräume. ξ, η haben weiterhin stetige bzw. glatte Bündel-Metriken g, g' . Falls ξ, η glatte Vektorbündel sind, dann bezeichne ∇ einen metrischen Zusammenhang und ∇_t die Komposition mit den kanonischen Vektorfeld ∂_t . Für die Klärung dieser Begriffe vgl. Abschnitt 1.3.III und 1.3.V.

Definition 1.4.23. Angenommen ξ sei bloß ein stetiges Vektorbündel mit stetiger Bündel-Metrik. Betrachte auf E die Borel- σ -Algebra und sei $\Gamma_{\text{mess}}(\overline{\mathbb{R}}, E)$ der Raum aller messbaren Schnitte (d.h. Urbilder offener Mengen sollen in $\overline{\mathbb{R}}$ messbar sein). Setze

$$\Gamma_{L^2}(\overline{\mathbb{R}}, E) := \left\{ f \in \Gamma_{\text{mess}}(\overline{\mathbb{R}}, E) \mid \int_{\mathbb{R}} g_t(X, Y) dt < \infty \right\}$$

und teile den Unterraum $\mathcal{N} := \{f = 0 \text{ f.ü.}\}$ heraus. Wir erhalten so den Raum $L^2(\xi) := \Gamma_{L^2}(\overline{\mathbb{R}}, E)$ mit dem Skalarprodukt

$$\Gamma_{L^2}(\overline{\mathbb{R}}, E) \times \Gamma_{L^2}(\overline{\mathbb{R}}, E) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} g_t(X, Y) dt.$$

Angenommen ζ ist ein glattes Bündel. Mit ∇_t kann man den Raum der **Testschnitte** $\Gamma_{\mathcal{C}_0^\infty}(\mathbb{R}, E)$ definieren und damit das Konzept schwache Ableitung übertragen. Damit hat man den **Sobolev Raum** $H^1(\zeta) := \Gamma_{H^1}(\overline{\mathbb{R}}, E)$ mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle_{H^1} := \langle X, Y \rangle_{L^2} + \langle \nabla_t X, \nabla_t Y \rangle_{L^2}.$$

Kommentar 1.4.24. Die Räume $L^2(\zeta)$ und $H^1(\zeta)$ tragen eine natürliche $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{R}})$ -Modul Struktur.

Beispiel 1.4.25. Wenn ζ das triviale Bündel ist, d.h. $E = F \times \overline{\mathbb{R}}$, mit triviale Metrik und trivialen Zusammenhang ist, dann gilt natürlich $\mathfrak{S}(\zeta) = \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ für $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$.

Beispiel 1.4.26. Sei M^n eine riemannsche Mannigfaltigkeit,

$$h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M) := \{s \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid s(-\infty) = x, s(+\infty) = y\}$$

und $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ das Tangentialbündel von M . Das Rückzugbündel $h^*\pi$ mit der Rückzug-Metrik und Rückzug-Zusammenhang ist ein Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$, vgl. Abschnitt 1.3.V. Also können wir das Objekt $H^1(h^*TM) := H^1(h^*\tau_M)$ definieren.

Satz 1.4.27. Sei ζ eine stetiges Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

- (i) Es gibt einen (stetigen) linearen Bündel-Isomorphismus $\varphi: \zeta \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$.
- (ii) Jeder lineare Bündel-Isomorphismus $\varphi: \zeta \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ induziert einen (stetigen) Isomorphismus zwischen Banachräumen

$$\varphi_*: \mathcal{C}^0(\zeta) \rightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n), \quad (\varphi_*s)(t) := \varphi_t(s(t)),$$

wobei $\varphi_t = \varphi|_{E_t}$ sei, und einen weiteren (stetigen und wohldefinierten) Isomorphismus

$$\varphi_*: L^2(\zeta) \rightarrow L^2(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n), \quad (\varphi_*s)(t) := \varphi_t s(t).$$

Weiterhin sind beide Isomorphismen auch $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{R}})$ -linear.

Beweis. Der nächste Beweis stammt vom Autor.

Zu (i): Sei $-\infty \leq a < b < c < d \leq \infty$. Wir zeigen folgende Aussage: Angenommen es gibt (stetige) lineare Bündel-Isomorphismen ${}^1\Phi: E_{[a,c]} \rightarrow [a,c] \times \mathbb{R}^n$ und ${}^2\Phi: E_{[b,d]} \rightarrow [b,d] \times \mathbb{R}^n$, dann existiert ein (stetiger) linearer Bündel-Isomorphismus $\varphi: E_{[a,d]} \rightarrow [a,d] \times \mathbb{R}^n$. Dabei bezeichne $E_{[a,b]}$ das via der Inklusion $[a,b] \hookrightarrow \mathbb{R}$ induzierte Rückzugbündel.

Indem wir notfalls zu ${}^2\tilde{\Phi} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \Phi_2$ übergehen, können wir annehmen, dass ${}^2\Phi_c \circ {}^1\Phi_c^{-1} \in \text{GL}_n^+ \mathbb{R}$ gilt, wobei ${}^i\Phi_c: F_c \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2$ ist. Wähle nun einen stetigen

Weg $\alpha: [b, c] \rightarrow \text{GL}_n^+ \mathbb{R}$ mit $\alpha(b) = \mathbf{1}$ und $\alpha(c) = {}^2\Phi_c \circ {}^1\Phi_c^{-1}$. Definiere φ durch

$$\varphi: E_{[a,d]} \rightarrow \mathbb{R}^n \times [a,d], \quad \zeta \mapsto \begin{cases} {}^1\Phi(\zeta) & \text{falls } \pi(\zeta) \in [a,b] \\ \alpha \circ \pi(\zeta) \cdot {}^1\Phi(\zeta) & \text{falls } \pi(\zeta) \in [b,c] \\ {}^2\Phi(\zeta) & \text{falls } \pi(\zeta) \in [c,d]. \end{cases}$$

Es ist nun nicht mehr schwer zu sehen, dass man so iterativ den gewünschten linearen Bündel-Isomorphismus $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$ definieren kann.

Zu (ii): Es ist klar, dass

$$\varphi_*: \mathcal{C}^0(\zeta) \rightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$$

ein Isomorphismus ist, denn φ^{-1} induziert die Umkehrabbildung $(\varphi^{-1})_*$. Sei $|\cdot|_t$ bzw. $|\cdot|'_t$ die induzierte Norm von $g_t(\cdot, \cdot)$ bzw. $g'_t(\cdot, \cdot)$ (man spricht auch von der induzierten Finsler-Struktur). Man kann die Wohldefiniertheit (genauer: $\varphi_*s \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$) und die Stetigkeit von φ_* in nur einer Rechnung zeigen: Für fast alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(|\varphi_*s(t)|'_t)^2 \leq \|\varphi_t\|_{L(E_t, \mathbb{R}^n)}^2 |s(t)|_t^2 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi_t\|^2 \cdot |s(t)|_t^2.$$

Integration über \mathbb{R} liefert die Behauptung. Analog wie oben sieht man, dass $(\varphi^{-1})_*$ die (stetige) lineare Umkehrabbildung von φ_* ist. \square

Satz 1.4.28. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ und $\zeta_{\mathbb{K}} := (E, \pi, \mathbb{K}, F)$ ein glattes Vektorbündel über \mathbb{K} , $\mathbb{K} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ das triviale Bündel mit trivialem Zusammenhang δ und $T: \mathbb{R}^n \rightarrow E_0$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann existiert genau ein (glatter) linearer Bündel-Isomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \zeta_{\mathbb{R}}$, so dass für

$$\varphi_*: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\zeta_{\mathbb{R}}), \quad (\varphi_*X)(t) := \varphi_t X(t)$$

gilt

$$\nabla \circ \varphi_* = \varphi_* \circ \delta,$$

im Punkt $t = 0$ gilt $\varphi_0 = T$ und $\forall t \in \mathbb{K}$ ist φ_t ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von φ wird bei der Konstruktion des Parallel-Transports in [GHV73, 7.17 Prop.VII] (vgl. Schritt 1 und 2) bewiesen.

Sei $(e_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathbb{R}^n$ die kanonische Basis. Die Schnitte (t, e_i) bilden einen globalen orthonormalen Rahmen des trivialen Bündels. Wir zeigen, dass die Bilder $\gamma_i := \varphi_*(t, e_i)$ einen orthonormalen Rahmen von ζ bilden und sind dann fertig. Wir rechnen

$$\frac{d}{dt} g_t(\gamma_i, \gamma_j) = g_t(\nabla \gamma_i, \gamma_j) + g_t(\gamma_i, \nabla \gamma_j) = g_t(\varphi_* \circ \delta(t, e_i), \gamma_j) + g_t(\delta_i, \varphi_* \circ \delta(t, e_j)) = 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass $t \mapsto (t, e_i)$ parallele Schnitte bzgl. δ sind, d.h. $\delta_i(t, e_i) = 0$. Damit gibt es ein $c_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $g_t(\gamma_i, \gamma_j) = c_{ij}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t = 0$ wissen wir, aber dass wir eine Isometrie vor uns haben, d.h. es gilt $c_{ij} = \delta_{ij}$. \square

Korollar 1.4.29. Sei ξ ein glattes Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$. Es gibt einen isometrischen Isomorphismus

$$H^1(\xi) \cong H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Korollar 1.4.30 (Mannigfaltigkeiten Modell). Seien ξ, η glatte Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$.

(i) Die Inklusion $H^1(\xi) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\xi)$ ist stetig.

(ii) Sei $\mathcal{O} \subseteq_o E$ mit $\pi(\mathcal{O}) = \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist

$$H^1(\mathcal{O}) := \{s \in H^1(\xi) \mid s_t \in \mathcal{O} \cap F_t \forall t \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

eine offene Teilmenge von $H^1(\xi)$.

(iii) Die Inklusion

$$H^1(\mathbb{R}, L^\nu(\xi, \eta)) \hookrightarrow L^\nu(\mathfrak{S}(\xi), \mathfrak{S}(\eta)), \quad A \mapsto A_*$$

ist stetig, wobei $A_*(s_1, \dots, s_\nu)(t) := A_t(s_1(t), \dots, s_\nu(t))$ für $s_i \in \mathfrak{S}(\xi)$ sei.

Beweis. Zu (i) und (iii): Wegen Satz 1.4.28 kann man die Beweise von Proposition 1.4.15, Proposition 1.4.21 und Korollar 1.4.30 einfach kopieren, vgl. die entsprechenden o.B.d.A.'s.

Zu (ii): Sei $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}) := \{s \in \mathcal{C}^0(\xi) \mid s_t \in \mathcal{O} \cap F_t \forall t \in \overline{\mathbb{R}}\}$. Da $\overline{\mathbb{R}}$ kompakt ist, stimmt die kompakt-offen Topologie von $\mathcal{C}^0(\xi)$ mit seiner Norm-Topologie überein. Damit gilt $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}) \subseteq_o \mathcal{C}^0(\xi)$. Wegen (i) gilt

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{O}) \subseteq_o \mathcal{C}^0(\xi) \quad \Rightarrow \quad H^1(\mathcal{O}) \subseteq_o H^1(\xi),$$

was die Behauptung zeigt. □

Kommentar 1.4.31. Die Symbole L^2 bzw. H^1 sind kovariante Funktoren von der Kategorie der metrischen Vektorbündel mit metrischen Zusammenhängen über $\overline{\mathbb{R}}$ in die Kategorie der Banachräume. Diese Funktoren ordnen jedem Vektorbündel ξ einen Banachraum $\mathfrak{S}(\xi)$ zu, wobei man die Elemente von $\mathfrak{S}(\xi)$ als Schnitte im Bündel ξ sehen kann (das Fraktal „S“ soll an das Wort Schnitt erinnern). Man spricht auch von einem **Schnitt-Funktor**. Für den Fall $\mathfrak{S} = L^2$ kennt man kein vernünftiges Konzept um den Raum „ $L^2(\overline{\mathbb{R}}, M)$ “ zu definieren. Wenn man den trivialen Fall $M = \mathbb{R}$ untersucht, dann stellt man sogar fest, dass die Eigenschaft, eine L^2 -Funktion zu sein, nicht Karten-invariant ist. Wir werden als nächstes den Raum „ $H^1_{x,y}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ “ konstruieren. Er ist modelliert auf $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.⁷ Weil $\mathfrak{S} = H^1$ die Konstruktion einer Mannigfaltigkeit erlaubt, sagt man auch, dass H^1 ein **Mannigfaltigkeiten-Modell** ist. Korollar 1.4.30 wird

⁷Es ist $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ein separabler Hilbertraum und damit isometrisch isomorph zu ℓ^2 . D.h. jede separable Hilbert-Mannigfaltigkeit hat ℓ^2 als Modellraum. Aus didaktischen Gründen nennen wir diesen Modellraum.

dabei eine wichtige Rolle spielen. Dieser Sprachgebrauch wurde in [Eli67] festgelegt und wird in diversen Quellen z.B. [Lan99] und [Sch93] benutzt. Im Artikel von Eliasson wird als Spezialfall gezeigt, dass die Symbole \mathcal{C}^k und H^k Mannigfaltigkeiten-Modelle sind. Allerdings wird nicht gezeigt (auch nicht angedeutet), dass diese Räume genau einen Modellraum besitzen. Aus diesen und anderen Gründen haben wir auf den funktoriellen Sprachgebrauch verzichtet.

IV. Die Hilbert-Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$

Für den Rest dieses Abschnitts seien $\xi = (E, \pi, \overline{\mathbb{R}}, V)$ und $\eta = (F, \rho, \overline{\mathbb{R}}, W)$ glatte Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$, wobei V, W endlich dimensionale Vektorräume seien, mit glatter Bündel-Metriken g, g' und $\mathcal{O} \subseteq_o E$ mit $\pi(\mathcal{O}) = \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{O}_t := \mathcal{O} \cap V_t$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}$. Ähnlich wie wir in Korollar 1.4.29 nur $\varphi: \xi \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ notiert haben, meinen wir mit $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \eta$ in Wirklichkeit, dass Φ eine Abbildung vom Quadrupel $(\mathcal{O}, \pi|_{\mathcal{O}}, \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_t)$ nach η ist.

Definition 1.4.32. Sei $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \eta$ eine glatte **Bündelabbildung**, d.h. $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow E'$ ist eine glatte Abbildung mit $\rho \circ \Phi = \pi$. Wir definieren die **Faserableitung** von Φ auf \mathcal{O}_t als

$$d_2\Phi_t := d(\Phi|_{\mathcal{O}_t}),$$

wobei wir rechts das gewöhnliche (endlich dimensionale) Differential der glatten Abbildung $\Phi|_{\mathcal{O}_t}: \mathcal{O}_t \rightarrow W_t$ nehmen. Analog definieren wir die ν -te **Faserableitung** von Φ auf der Faser \mathcal{O}_t durch

$$d_2^\nu\Phi_t := d^\nu(\Phi|_{\mathcal{O}_t}),$$

wobei wir rechts das ν -te Differential von $\Phi|_{\mathcal{O}_t}$ betrachten. Damit ist die ν -te **Fasera-bleitung** von Φ auf \mathcal{O}

$$d_2^\nu\Phi: \mathcal{O} \rightarrow L^\nu(\xi, \eta)$$

erklärt und mit der kanonischen Inklusion aus Korollar 1.4.30 (iii)

$$H^1(L^\nu(\xi, \eta)) \subseteq L^\nu(H^1(\xi), H^1(\eta))$$

definiert man

$$(d_2^\nu\Phi)_*: H^1(\mathcal{O}) \rightarrow L^\nu(H^1(\xi), H^1(\eta)), \quad s \mapsto d_2^\nu\Phi \circ s.$$

Kommentar 1.4.33. Die Notation $d_2\Phi_p$ soll an das partielle Differential erinnern, vgl. Definition 1.2.14. Tatsächlich gilt folgende Rechenregel: Sei $s \in H^1(\mathcal{O})$ beliebig. Für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $s(t) = 0_t \in F_t$ gilt

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \Phi \circ s = d_1\Phi(0_t) + d_2\Phi(0_t) \dot{s}(0),$$

wobei $d_1\Phi$ die Differentiation bzgl. des Nullschnittes meint. Wir präzisieren diese Aussage: Die Abbildung $\Phi \circ s$ ist ein (stetiger) Schnitt im Bündel η . Auf η haben wir einen Zusammenhang $K: TF \rightarrow F$ zur Verfügung, der uns eine Spaltung in vertikalen T_vF und horizontalen Anteil T_hF liefert. $d_2\Phi(0_t)$ ist der vertikale Anteil und $d_1\Phi(0_t)\dot{s}(0)$ der horizontale Anteil von $\frac{d}{dt}\Phi \circ s(t)$. Wir erinnern daran, dass $T_{\xi,v}E$ kanonisch mit $T_{\xi}E_p$ übereinstimmt, vgl. Kommentar 1.3.65.

Lemma 1.4.34 (ω -Lemma). *Es habe \mathcal{O} noch folgende Eigenschaft: $\exists \sigma \in \mathcal{C}^0(\xi)$ mit*

$$\text{supp } \sigma := \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid \sigma_t \neq 0 \in V_t\}} \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}$$

und $\text{Im } \sigma \subset \mathcal{O}$. Sei $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \eta$ eine glatte Bündelabbildung, die $\Phi(0_{\pm\infty}) = 0_{\pm\infty}$ erfüllt. Dann ist die induzierte Abbildung

$$\Phi_*: H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\eta), \quad s \mapsto \Phi \circ s$$

Fréchet-glatt. Das v -te Fréchet-Differential-Abbildung (vgl. Definition 1.2.7)

$$d^v(\Phi_*): H^1(\mathcal{O}) \rightarrow L^v(H^1(\xi), H^1(\eta))$$

lässt sich explizit durch folgende Formel berechnen: Für alle $s \in H^1(\mathcal{O})$ gilt

$$d^v(\Phi_*)_s = (d_2^v\Phi)_*(s).$$

Beweis. Wir folgen den Gedanken in [Sch93].

Zuerst einmal zeigen wir, dass Φ_* wohldefiniert ist, d.h. für $s \in H^1(\mathcal{O})$ ist tatsächlich $\Phi_*(s) \in H^1(\eta)$. Da σ kompakten Träger in \mathbb{R} hat und s auf ganz $\overline{\mathbb{R}}$ integrierbar sein muss und nach Korollar 1.4.30 (i) stetig ist, können wir die Existenz von $\mathcal{D} \subseteq_o \mathcal{O}$ annehmen mit folgender Eigenschaft: es gibt ein $t_0 > 0$, so dass \mathcal{D}_t konvex ist (bzgl. der Finsler-Norm) für alle $t \geq |t_0|$, $\sigma(t) = 0$ und $s(t) \in \mathcal{D}_t$. Man kann nun wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $\Phi_t: \mathcal{D}_t \rightarrow F_t$ und der Konvexität von \mathcal{D}_t nachrechnen, dass es ein $L = L(t_0) > 0$ gibt, so dass

$$|\Phi_t(x_t) - \Phi_t(y_t)| \leq L|x_t - y_t| \quad \forall x_t, y_t \in \mathcal{D}_t \quad |t| \geq t_0.$$

Wenn man für x_t den Schnitt s einsetzt und für y_t den Schnitt σ , dann folgert man die Ungleichung

$$|\Phi \circ s(t)| \leq L|s(t)| + |\Phi_t(0)| \quad \forall |t| \geq t_0$$

und damit

$$|\Phi \circ s(t)|^2 \leq 2L^2|s(t)|^2 + 2|\Phi_t(0)|^2.$$

Da $\Phi_t(0)$ eine stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{\mathbb{R}}$ ist, folgt damit die L^2 -Integrierbarkeit. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \Phi_t(s(t)) \right|^2 &= |d_1\Phi \circ s(t) + d_2\Phi \circ s(t)\dot{s}(t)|^2 \leq 2|d_1\Phi \circ s(t)|^2 + 2|d_2\Phi \circ s(t)\dot{s}(t)|^2 \\ &\leq 2|d_1\Phi \circ s(t)|^2 + 2 \left(\sup_{|t| \geq t_0} \|d_2\Phi \circ s(t)\|^2 \right) |\dot{s}(t)|^2 \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Indem wir notfalls zu einem größeren $t_0 > 0$ übergehen, können wir die L^2 -Integrierbarkeit von $d_1\Phi \circ s(t)$ absichern (analoge Ungleichung wie für $\Phi \circ s$). Das zeigt die Wohldefiniertheit.

Beweis durch Induktion über ν . *Induktionsanfang:* Sei $\nu = 0$. Es ist die Stetigkeit der Abbildung

$$\Phi_*: H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\eta)$$

nachzuweisen. Wir haben oben implizit die Stetigkeit gezeigt.

Induktionsschluss: Angenommen die Behauptung gilt bereits für ν . Setze $\eta^\nu := L^\nu(\xi, \eta)$. Sei $s_0 \in H^1(\mathcal{O})$ fest. Es ist also

$$d^\nu(\Phi_*)_{s_0} = (d_2^\nu\Phi)_*(s): \overline{\mathbb{R}} \rightarrow L^\nu(E, F)$$

ein stetiger Schnitt und wir definieren

$$\Phi^{(\nu)}: \mathcal{O} \rightarrow \eta^\nu, \quad (t, v) \mapsto d_2^\nu\Phi(t, v) - d_2^\nu\Phi(t, s_0(t)).$$

Für s_0 gibt es ein $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\text{Im } s_0) \subseteq_o \mathcal{O}$, so dass \mathcal{D}_t konvex ist für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}$. Die nächste Abbildung geben wir faserweise an: Für $x, y \in \mathcal{D}_t$ und $z \in E_t$ betrachte die Abbildung

$$F: \mathcal{D} \oplus \mathcal{D} \rightarrow L(E, L^\nu(E, F)), \quad F(x, y)z := \left(\int_0^1 d_2\Phi^{(\nu)}(x + \tau(y-x))d\tau - d_2\Phi^{(\nu)}(x) \right)z.$$

Da $d_2\Phi^{(\nu)}: \mathcal{O} \rightarrow L(\eta, \eta^\nu)$ eine glatte Bündelabbildung ist, trifft es auch auf F zu, d.h. wir haben sogar

$$F: \mathcal{D} \oplus \mathcal{D} \rightarrow L(\xi, \eta^\nu),$$

wobei wir mit \mathcal{D} jetzt das Quadrupel $(\mathcal{D}, \pi, \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{D}_t)$ meinen. Ähnlich wie im Induktionsanfang $\nu = 0$ kann man zeigen, dass die induzierte Abbildung

$$F_*: H^1(\mathcal{D}) \oplus H^1(\mathcal{D}) \rightarrow L(H^1(\xi), H^1(\eta^\nu))$$

wohldefiniert ist. Betrachte nochmal F : Es gilt

$$\begin{aligned} F(x, y)(y-x) &= \left(\int_0^1 d_2\Phi^{(\nu)}(x + \tau(y-x))d\tau - d_2\Phi^{(\nu)}(x) \right)(y-x) \\ &= \int_0^1 d_2\Phi^{(\nu)}(x + \tau(y-x))(y-x)d\tau - d_2\Phi^{(\nu)}(x)(y-x) \\ &= \Phi^{(\nu)}(y) - \Phi^{(\nu)}(x) - d_2\Phi^{(\nu)}(x)(y-x), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung benutzt haben. Weiterhin gilt

$$F(0, 0) = \int_0^1 d_2\Phi^{(\nu)}(0 + \tau(0-0))d\tau - d_2\Phi(0) = 0,$$

d.h. wir haben

$$\Phi^{(\nu)}(y) - \Phi^{(\nu)}(x) - d_2\Phi^{(\nu)}(x)(y-x) = F(x,y)(y-x) \quad \text{und} \quad F(0,0) = 0. \quad (*)$$

Die linke Seite von Gleichung (*) impliziert die neue Gleichung

$$\Phi_*^{(\nu)}(s) - \Phi_*^{(\nu)}(s_0) - (d_2\Phi^{(\nu)})_*(s_0)(s-s_0) = F_*(s_0,s)(s-s_0).$$

Es ist klar, dass $F_*(s_0,s_0) = 0$ gilt. Wegen dem Induktionsanfang $\nu = 0$ gilt auch $\lim_{s \rightarrow s_0} F_*(s_0,s) = 0$. Das impliziert die Differenzierbarkeit von $\Phi_*^{(\nu)}$ in s_0 mit bereits erwähntem Differential $(d_2\Phi^{(\nu)})_* = (d_2^{\nu+1}\Phi)_*$. Es ist noch die Stetigkeit des Differentials zu zeigen. Das folgt aber aus der Stetigkeit von

$$H^1(\mathcal{O}) \rightarrow L(H^1(\xi), H^1(\eta^\nu)), \quad s \mapsto (d_2\Phi^\nu)_*(s) - (d_2\Phi^\nu)_*(s_0),$$

denn falls s_0 glatt ist, erfüllt die Abbildung

$$\mathcal{O} \rightarrow L(\xi, \eta), \quad (t, v) \mapsto d_2\Phi^\nu(t, v) - d_2\Phi^\nu(t, s_0(t))$$

die Voraussetzungen für den Induktionsanfang $\nu = 0$. □

Theorem 1.4.35. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und \mathcal{D} wie in Lemma 1.3.74. Dann besitzt die Menge*

$$\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) := \{\exp_h s \in \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M), s \in H^1(h^*\mathcal{D})\},$$

wobei wir

$$\mathcal{C}_{x,y}^k(\overline{\mathbb{R}}, M) := \{s \in \mathcal{C}^k(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid s(-\infty) = x, s(+\infty) = y\}$$

für $k \in \{0, \infty\}$ gesetzt haben und $\exp_h s(t) := \exp_{h(t)} s(t)$ meinen, die Struktur einer Banach-Mannigfaltigkeit modelliert auf $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Die vom Atlas induzierte Topologie ist hausdorff und separabel. Die differenzierbare Struktur hängt nicht von der Wahl der riemannschen Metrik g ab. Weiterhin gelten für $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ folgende äquivalente Beschreibungen als Menge:

(i)

$$H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M) := \{c \in \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid \forall (U, \varphi), (V, \psi) \text{ gilt } \psi \circ c \circ \varphi^{-1} \in H^1(U, \mathbb{R}^n)\}$$

(ii)

$$\{c \in \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid c \text{ ist absolutstetig und } \dot{c} \in L^2(c^*\tau_M)\},$$

wobei wir absolutstetig bzgl. metrischen Räumen meinen.

Beweis. Wir folgen den Gedanken in [Sch93]; die letzten beiden Behauptungen samt Beweis stammen vom Autor.

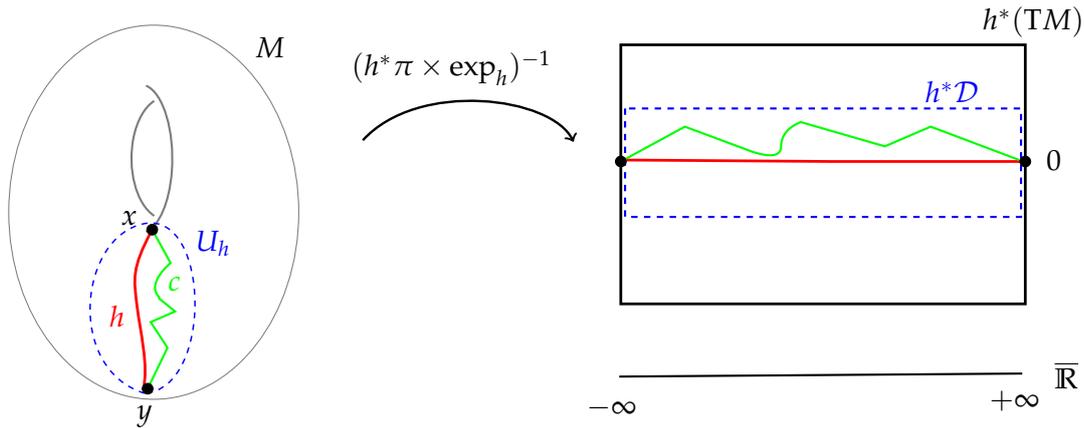


Abbildung 1.3.: Skizze von der Karte $(\exp_h)_*^{-1}$

Wir werden zuerst den Atlas für $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ konstruieren. Sei $h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$ fest. Betrachte die Abbildung

$$h^* \pi \times \exp_h: h^* \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \times M, \quad (t, v) \mapsto (t, \exp_{h(t)} v),$$

Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{(\tau_M \times \exp)|_{\mathcal{D}}} & M \times M \\ \pi^* h \uparrow & & \uparrow h \times \mathbb{1} \\ h^* \mathcal{D} & \xrightarrow{h^* \pi \times \exp_h} & \overline{\mathbb{R}} \times M \end{array}$$

kommutiert, liest man daraus ab, dass $h^* \pi \times \exp_h$ eine Einbettung mit offenem Bild ist. Wir definieren dann $U_h := \text{Im}(h^* \pi \times \exp_h)$ und

$$U_h := H^1(U_h) := \{c \in \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid (h^* \pi \times \exp_h)^{-1}(\mathbb{1}_{\overline{\mathbb{R}}} \times c) \in H^1(h^* \mathcal{D})\}.$$

Wir haben in Abbildung 1.3 u.a. versucht die Menge U_h zu skizzieren (die grüne Kurve ist ein Element darin), wobei wir vereinfacht angenommen haben, dass h eine injektive Immersion ist, d.h. die Kurve h bleibt nirgends stehen und überschneidet sich nicht. Damit kann man U_h bzw. $\mathbb{1}_{\overline{\mathbb{R}}} \times c$ kanonisch mit $\text{pr}_2(U_h)$ bzw. c identifizieren, wobei wir letzteres im Bild eingezeichnet haben.

Wir definieren unser „lokales Koordinatensystem“ via dem „ H^1 -Funktork“ durch

$$(\exp_h)_*: H^1(h^* \mathcal{D}) \rightarrow U_h, \quad s \mapsto \exp_h s,$$

wobei $(\exp_h s)(t) := \exp_{h(t)} s(t)$ sei. Wir stellen an dieser Abbildung folgendes fest:

- Anhand der Gleichung

$$(h^* \pi \times \exp_h)^{-1} \circ (\mathbb{1}_{\overline{\mathbb{R}}}, \exp_h s) = s$$

liest man ab, dass tatsächlich $\exp_h s \in \mathcal{U}_h$ ist und $(\exp_h)_*$ sogar injektiv ist. Weiterhin ist $(\exp_h)_*$ surjektiv, denn für ein beliebiges $c \in \mathcal{U}_h$ kann man den Schnitt

$$\gamma := (h^* \pi \times \exp_h)^{-1} \circ (\mathbb{1}_{\overline{\mathbb{R}}}, c)$$

als Urbild von $(\exp_h)_*$ verifizieren.

- Wegen der Definition von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ gilt

$$\bigcup_{h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)} \mathcal{U}_h = \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M).$$

- Wegen $\mathcal{D} \subseteq_o TM$ ist $h^* \mathcal{D} \subseteq_o h^* TM$ und damit ist nach Korollar 1.4.30

$$H^1(h^* \mathcal{D}) \subseteq_o H^1(h^* \pi).$$

Weiterhin gilt nach Korollar 1.4.29 $H^1(h^* \pi) \cong H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

- Der „Kartenübergang“ $(\exp_g)_*^{-1} \circ (\exp_h)_*$ für $g, h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$ ist glatt. Das sieht man mit dem ω -Lemma 1.4.34. Angenommen $\mathcal{U}_h \cap \mathcal{U}_g \neq \emptyset$, dann ist $\mathcal{U}_h \cap \mathcal{U}_g$ nicht-leer und zusammenhängend (beide Eigenschaften zeigt man durch einen indirekten Beweis). Da $\mathcal{U}_h \cap \mathcal{U}_g \subseteq_o \mathcal{U}_h$ gilt

$$\mathcal{O} := (h^* \pi \times \exp_h)^{-1}(\mathcal{U}_h \cap \mathcal{U}_g) \subseteq_o h^* TM,$$

und die Existenz eines stetigen Schnittes mit kompaktem Träger macht man sich mit Abbildung 1.3 anschaulich klar (man beachte, dass die Punkte $(\pm, 0)$ rechteckige Umgebungen in $h^* \mathcal{D}$ haben). Die Abbildung

$$\varphi_{g,h} := (g^* \tau_M \times \exp_g)^{-1} \circ (h^* \pi \times \exp_h): \mathcal{O} \rightarrow g^* TM$$

ist glatt und bildet Faser \mathcal{O}_t auf $T_{g(t)} M$ ab. Weiterhin gilt $\varphi_{g,h}(0_{\pm\infty}) = 0_{\pm\infty}$. Damit sind die Voraussetzungen vom ω -Lemma 1.4.34 erfüllt und die Abbildung

$$(\varphi_{g,h})_* = (\exp_g)_*^{-1} \circ (\exp_h)_*$$

ist glatt (die obige Gleichheit zeigt man, indem man nachrechnet, dass sie punktweise stimmt).

Damit ist also die Familie

$$(\mathcal{U}_h, (\exp_h)_*^{-1})_{h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)}$$

ein differenzierbarer Atlas für $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$.

Man gibt nun $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ die vom Atlas induzierte Topologie. Diese Topologie ist feiner als die kompakt-offen Topologie von $\mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und deshalb erbt man die

Separabilität und Hausdorff-Eigenschaft (Dass $\mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M)$ diese Eigenschaften von $\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, M)$ vererbt, muss man natürlich nachrechnen).

Hat man nun zwei verschiedene riemannsche Metriken g, g' mit \exp, \exp' , so erhält man aus Lemma 1.3.74 zwei verschiedene $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subseteq_o TM$. Man kann nun eine ähnliche Rechnung wie beim „Kartenübergang“ (vgl. den dritten \bullet) durchführen und man sieht, dass

$$(h^* \pi \times \exp_h)^{-1} \circ (h^* \pi \times \exp'_h)$$

eine glatte Bündelabbildung ist. Das ω -Lemma liefert dann, dass die beiden Atlanten kompatibel sind.

Zu (i): Für die Inklusion $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \supseteq H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ benötigen wir ein Approximations-Theorem, das man in [Hir76, Thm. 2.3.5] nachlesen kann:

Theorem. Sei (M, M_0) und (N, N_0) ein \mathcal{C}^s Mannigfaltigkeiten-Paare, $1 \leq s \leq \infty$. Angenommen M_0 ist abgeschlossen und eine „gute“ Untermannigfaltigkeit, dann ist $\mathcal{C}^s(M, M_0; N, N_0)$ dicht in $\mathcal{C}^r(M, M_0; N, N_0)$ für $0 \leq r < s$. [...]

In dem wir notfalls eine andere riemannsche Metrik g auf M betrachten, können wir annehmen, dass der *Injektivitätsradius* von g überall größer ist als eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$. Damit folgert man, dass es für jedes

$$c \in H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M) \subseteq \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M) = \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \{\pm\infty\}; M, \{x, y\})$$

ein $h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M) = \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, \{\pm\infty\}; M, \{x, y\})$ gibt, so dass c in der \mathcal{U}_h Umgebung von h liegt. Für die Inklusion $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \subseteq H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ verweisen wir auf Theorem 1.4.39, das wir später formulieren und beweisen werden.

Zu (ii): Angenommen c ist eine absolutstetige Funktion mit L^2 -Ableitung \dot{c} . Dann ist es nicht schwer zu sehen, dass $c \in H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ ist. Angenommen $c = \exp_h s$. Dann ist wegen $c \in H_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ klar, dass c absolutstetig ist. Dass \dot{c} eine L^2 -Schnitt in h^*TM ist, folgt aus Theorem 1.4.39. \square

V. Das Hilbert-Bündel $\mathfrak{S}(\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)^*TM)$

Definition 1.4.36. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $\exp: \mathcal{O} \rightarrow M$ die zugehörige Exponentialabbildung, \mathcal{D} wie in Lemma 1.3.74 und K die riemannsche Zusammenhangs-Abbildung wie in Abschnitt 1.V. Für $\xi \in \mathcal{D}$ definieren wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \nabla_1 \exp_\xi &:= d \exp_\xi \circ (d\pi|_{T_{\xi,h}TM})^{-1}: T_{\pi(\xi)}M \rightarrow T_{\exp(\xi)}M, \\ \nabla_2 \exp_\xi &:= d \exp_\xi \circ (K|_{T_{\xi,v}TM})^{-1}: T_{\pi(\xi)}M \rightarrow T_{\exp(\xi)}M. \end{aligned}$$

Theorem 1.4.37. Sei $\mathfrak{S} \in \{L^2, H^1\}$, $B := \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$,

$$\mathfrak{S}^*TM := \mathfrak{S}(\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)^*TM) := \sum_{s \in B} \mathfrak{S}(s^*TM) \quad \text{und} \quad \pi_{\mathfrak{S}}: \mathfrak{S}^*TM \rightarrow B$$

die offensichtliche Projektion, $F^{\mathfrak{S}} := \mathfrak{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und

$$\mathfrak{A} := (\mathcal{U}_h, (\exp_h)_*^{-1}, \phi_h)_{h \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)},$$

wobei

$$\phi_h^{-1}: H^1(h^*\mathcal{D}) \times \mathfrak{S}(h^*TM) \rightarrow \pi_{\mathfrak{S}}^{-1}(\mathcal{U}_h), \quad (\xi, \eta_h) \mapsto (\nabla_2 \exp_\xi(\eta_h))$$

ist. Dann ist das Quadrupel $\mathfrak{S}^*\tau_M := (\mathfrak{S}^*TM, \pi_{\mathfrak{S}}, B, F^{\mathfrak{S}})$ via \mathfrak{A} ein Hilbert-Bündel. Weiterhin gilt $H^{1*}\tau_M = \tau_{\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)}$.

Für einen Beweis dieses Theorems verweisen wir auf [Sch93, Appendix A, Thm. 11].

Als nächstes möchten wir die schwache Ableitung auf $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ untersuchen. Betrachte die dichte Teilmenge $\mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M) \subseteq \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und die Abbildung

$$\frac{d}{dt}: \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M) \rightarrow L^{2*}TM, \quad c \mapsto \dot{c}, \quad (*)$$

wobei die Wohldefiniertheit des Bildes aus Lemma 1.4.20 folgt. Bevor wir versuchen die obige Abbildung stetig auf $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ fortzusetzen, berechnen wir die lokale Darstellung von Abbildung (*).

Lemma 1.4.38. Sei $h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und $s \in \mathcal{C}^\infty(h^*\mathcal{D})$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \exp_{h(t)} s(t) = \nabla_1 \exp_{s(t)} \dot{h}(t) + \nabla_2 \exp_{s(t)} \nabla_t s(t).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{s} := \pi^*h \circ s$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \exp_{h(t)} s(t) = \frac{d}{dt} \exp_{s(t)}(\pi^*h \circ s(t)) = d \exp_{s(t)}(\dot{\mathfrak{s}}(t)_h + \dot{\mathfrak{s}}(t)_v),$$

wobei $\dot{\mathfrak{s}}(t)_v$ für den Vertikal-Anteil und $\dot{\mathfrak{s}}(t)_h$ für den Horizontal-Anteil von $\dot{\mathfrak{s}}(t)$ steht; vgl. Kommentar 1.3.65. Wir rechnen weiter

$$\dot{\mathfrak{s}}(t)_h = (d\pi|_{T_{s(t),h}(TM)})^{-1} \circ d\pi_{s(t)}(\dot{\mathfrak{s}}(t)_h) = (d\pi|_{T_{s(t),h}(TM)})^{-1} \dot{h}(t)$$

und

$$\dot{\mathfrak{s}}(t)_v = (K|_{T_{s(t),v}(TM)})^{-1} \circ K_{s(t)}(\dot{\mathfrak{s}}(t)_v) = (K|_{T_{s(t),v}(TM)})^{-1} \nabla_t \zeta(t).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Das Lemma 1.4.38 zeigt insbesondere, dass wir die Abbildung $(*)$ auf ganz $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ erweitern können, ohne den Bildraum vergrößern zu müssen. Eine koordinatenfrei Definition der schwachen Ableitung von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ lautet also, dass die schwache Ableitung die eindeutig bestimmte stetige Erweiterung von Abbildung $(*)$ ist.

Theorem 1.4.39. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld mit $X(x) = X(y) = 0$. Dann ist die Abbildung*

$$F: \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\mathbb{R}, M) \rightarrow L^2(\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\mathbb{R}, M)^*TM), \quad c \mapsto \dot{c} + X \circ c \in L^2(c^*TM),$$

ein glatter Schnitt in $L^{2*}\tau_M$. Insbesondere ist die schwache Ableitung

$$\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\mathbb{R}, M) \rightarrow L^2(\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\mathbb{R}, M)^*TM), \quad c \mapsto \dot{c} \in L^2(c^*TM)$$

ein glatter Schnitt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der zweite Term $c \mapsto X \circ c$ glatt ist. Sei $h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$, so dass $c \in \mathcal{U}_h$, d.h. es gibt ein $s_0 \in H^1(h^*\mathcal{D})$ mit $\exp_h s_0 = c$. Dann gilt bzgl. der lokalen Trivialisierung

$$f_*: H^1(h^*\mathcal{D}) \rightarrow H^1(h^*\mathcal{D}) \times L^2(h^*TM), \quad s \mapsto (\nabla_2 \exp_s)^{-1} \circ X(\exp_h s).$$

Betrachte nun die glatte Bündelabbildung

$$f: h^*\mathcal{D} \rightarrow h^*TM, \quad v \mapsto \nabla_2 \exp_v^{-1} \circ X(\exp_h v).$$

f erfüllt die Voraussetzungen vom ω -Lemma 1.4.34. Deswegen ist f_* eine glatte Abbildung.

Wir zeigen nun, dass der erste Term \dot{c} (die schwache Ableitung) eine glatte Abbildung ist. Mit derselben Notation wie oben rechnet man:

$$(\nabla_2 \exp_s)^{-1}(\nabla_1 \exp_s \dot{h} + \nabla_2 \exp_s \nabla_t s) = \underbrace{((\nabla_2 \exp_s)^{-1} \circ \nabla_1 \exp_s)}_{=: \Theta(s)} \dot{h} + \nabla_t s.$$

Da die Abbildung $s \mapsto \nabla_t s$ stetig und linear ist, ist sie automatisch Fréchet-glatt. Ähnlich wie für f_* kann man zeigen, dass die Abbildung $s \mapsto \Theta(s)$ Fréchet-glatt ist. Damit ist insbesondere $s \mapsto \Theta(s) \dot{h}$ Fréchet-glatt. \square

Korollar 1.4.40. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion mit kritischen Punkten $x, y \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$F: \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\mathbb{R}, M) \rightarrow L^{2*}TM, \quad c \mapsto \dot{c} + \text{grad } f \circ c,$$

ein glatter Schnitt im Banach-Bündel $L^{2*}TM$. Bzgl. $(\mathcal{U}_h, (\exp_h)_*^{-1}, \Phi_h)$ hat F die lokale Darstellung

$$\begin{aligned} F^{\text{loc}} &:= \Phi_h \circ F \circ (\exp_h)_*: H^1(h^*\mathcal{D}) \rightarrow H^1(h^*\mathcal{D}) \times L^2(h^*TM), \\ &s \mapsto \Theta_s \dot{h} + \nabla_t s + (\nabla_2 \exp_s)^{-1} \circ \text{grad } f \circ \exp_h s, \end{aligned}$$

wobei $\Theta_s := ((\nabla_2 \exp_s)^{-1} \circ \nabla_1 \exp_s)$ ist.

Kommentar 1.4.41. Wir möchten in Abschnitt 2.2 zeigen, dass F eine Fredholm-Abbildung ist. Deshalb berechnen wir jetzt dF^{loc} . Dafür möchten wir das ω -Lemma (Lemma 1.4.34) benutzen. Betrachte die Hilfsabbildung

$$g: \xi \rightarrow \eta, \quad (t, v) \mapsto \Theta_v \dot{h}(t) + (\nabla_2 \exp_v)^{-1} X \circ \exp_{h(t)} v.$$

Die Faserableitung von g lautet

$$\begin{aligned} d_2g(t, v)w &= (d\Theta_v w) \dot{h}(t) + (d((\nabla_2 \exp_v)^{-1}) w) X \circ \exp_{h(t)} v \\ &\quad + (\nabla_2 \exp_v)^{-1} \circ dX_{\exp_{h(t)}(v)} \circ d\exp_{h(t)}(v) w. \end{aligned}$$

Man kann nun eine wichtige Eigenschaft von d_2g aus der obigen Form ablesen. Es gelten folgende Identitäten: $d\Theta_0 = 0$, $\nabla_2 \exp(\pm\infty, 0) = \mathbb{1}_{T_{x/y}M}$, $\exp_{h(\pm\infty)} 0 = y/x$ und $d\exp_{h(t)}(0) = \mathbb{1}_{T_{h(t)}M}$.⁸ Wenn wir nun die Punkte $(\pm\infty, 0)$ in die obige Formel einsetzen, dann erhalten wir

$$d_2g(\pm\infty, 0) = dX_{y/x} = H_f(y/x),$$

d.h. die Endpunkte sind nicht-degeneriert, selbstadjungierte Endomorphismen. Wir schreiben nun

$$F^{\text{loc}}: H^1(h^*\mathcal{D}) \rightarrow L^2(h^*TM),$$

d.h. wir unterdrücken den Fußpunkt im Bildbereich. Wegen Satz 1.4.28 können wir für ein festes $h \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und $s \in H^1(h^*\mathcal{D})$ den beschränkten Operator $d(F^{\text{loc}})_s$ identifizieren mit der Abbildung

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad h \mapsto \dot{h} + A_*h,$$

wobei $A: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ein stetiger Weg in den Matrizen ist, so dass $A_{\pm\infty}$ selbstadjungierte, invertierbare Matrizen sind.

⁸Für einen Beweis der ersten beiden Identität vgl. [Sch93].

2. Der Trajektorienraum

Wir besitzen nun alle technischen Hilfsmittel um in den Ansätzen eine Morse-Homologie zu entwickeln. Leider werden wir in dieser Arbeit aus Platzgründen, nicht den Kettenkomplex entwickeln können. Stattdessen werden wir uns in diesem Kapitel damit begnügen, dass wir den Trajektorienraum eines Morse-Gradienten-Vektorfeldes in den Ansätzen studieren. Wir werden zeigen, dass der Trajektorienraum die Struktur einer endlich-dimensionalen Banach-Untermannigfaltigkeit trägt und werden seine Dimension explizit berechnen.

2.1. Analytische Beschreibung des Trajektorienraums

Definition 2.1.1. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Wir nennen $p \in M$ einen **kritischen Punkt** von f , falls $df_p = 0$ ist. Für einen kritischen Punkt p ist die **Hessesche** von f wohldefiniert. Sie ist durch die symmetrische Bilinearform

$$H_f(p): T_p M \times T_p M, \quad (\xi, \eta) \mapsto \tilde{\xi}_p(\tilde{\eta}(f))$$

gegeben, wobei $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ Vektorfelder mit $\tilde{\xi}_p = \xi$ und $\tilde{\eta}_p = \eta$ sind. Wir nennen einen kritischen Punkt **nicht-degeneriert**, falls die Hessesche in diesen Punkt nicht ausgeartet ist.

Für eine Karte $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ um einen nicht-degenerierten kritischen Punkt bezeichne $\sigma\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right)$ das Spektrum der Hesse-Matrix von $f \circ \varphi^{-1}$. Wir definieren den **Morse-Index** von f in p als die natürliche Zahl

$$\mu(x) := \#\left(\sigma\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right) \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}\right).$$

Wir nennen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Morse-Funktion**, falls alle kritischen Punkte von f nicht-degeneriert sind. Wir nennen eine Morse-Funktion **koerziv**, falls für alle $a \in \mathbb{R}$ das „Sublevel“ $f^{-1}((-\infty, a])$ kompakt ist.

Kommentar 2.1.2. Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist die (riemannsche) Hessesche einer glatten Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ natürlich in allen Punkten definiert. Sie ist gegeben durch das $(0, 2)$ -Tensorfeld $\nabla^2 f = \nabla(df)$. In einer Karte $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ gilt $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ und damit rechnet man leicht nach, dass die lokale Darstellung

$$\nabla^2 f = \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k\right) dx^i \otimes dx^j \quad (*)$$

Kommentar 2.1.5. Im Vorwort wurden der Begriff Instanton und Trajektorienraum anhand von Beispielen illustriert.

Prinzipiell könnte man Instantone von nicht-koerziven Morse-Funktionen definieren. Wenn M aber nicht kompakt ist, dann ist für die Integralkurven von $-\text{grad } f$ für eine nicht-koerzive Morse-Funktionen f nicht klar, ob sie für alle Zeiten existiert.

Wir erinnern daran, dass in Theorem 1.4.39 gezeigt wurde, dass die Abbildung

$$F: \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \rightarrow L^{2*}TM, \quad c \mapsto \dot{c} + \text{grad } f \circ c. \quad (\Delta)$$

ein glatter Schnitt in dem Banach-Bündel $L^{2*}TM$ ist.

Proposition 2.1.6. Sei F wie in (Δ) definiert und sei $c \in \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ mit $F(c) = 0 \in L^2(c^*TM)$. Dann gilt $c \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$.

Kommentar 2.1.7. Proposition 2.1.6 ist eine Regularitäts-Aussage: Wenn eine stetige Kurve $c: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M$ die ODE $(*)$ (im schwachen Sinne) auf ganz $\overline{\mathbb{R}}$ erfüllt, dann ist c bereits glatt. Der Beweis dafür ist mehr oder weniger trivial. Für das entsprechende Resultat in der Floer-Homologie nutzt man aus, dass der dort auftretende Operator elliptisch ist.

Beweis von Proposition 2.1.6. Wir zeigen über vollständige Induktion: $\forall k \in \mathbb{N}_0$ ist $\dot{c}: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow c^*TM$ ein \mathcal{C}^k -Schnitt. Damit folgt die Behauptung. *Induktionsanfang:* Aus $F(c) = 0$ folgt $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\dot{c}(t) = -\text{grad } f \circ c(t).$$

Da c stetig und $\text{grad } f$ glatt ist, ist $\text{grad } f \circ c$ stetig. Damit ist \dot{c} stetig.

Induktionsschluss: Angenommen \dot{c} ist ein \mathcal{C}^{k-1} -Schnitt. Dann ist c eine \mathcal{C}^k -Abbildung. Damit ist $\text{grad } f \circ c$ ein \mathcal{C}^k -Schnitt. Genau wie oben schließt man, dass \dot{c} ein \mathcal{C}^k -Schnitt ist. \square

Bevor wir fortfahren, zeigen wir im nächsten Lemma, dass sich Instantone einem kritischen Punkt exponentiell (in der Zeit) schnell nähern.

Lemma 2.1.8. Sei $U = U(0) \subseteq_o \mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit 0 als nicht-degeneriertem kritischem Punkt, d.h. $X_0 = 0$ und dX_0 symmetrisch und regulär. Weiter sei s eine Integralkurve von X , d.h. $\dot{s} = X_s$, mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0. \quad (**)$$

Dann existieren Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(X) > 0$, $c = c(s) > 0$ und $t_0 = t_0(s) \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichung erfüllt ist

$$|s(t)| \leq c \cdot e^{-\varepsilon t} \quad \text{für alle } t \geq t_0. \quad (***)$$

Beweis. Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , $|\cdot|$ die induzierte Norm und $\|\cdot\|$ die induzierte Operatornorm auf $\text{Mat}_n \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion

$$\alpha(t) := \frac{|s(t)|^2}{2} = \frac{1}{2} \langle s(t), s(t) \rangle.$$

Hilfsrechnung: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $t_0 = t_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$\ddot{\alpha}(t) \geq |dX_0 s(t)|^2 - \varepsilon |s(t)|^2.$$

Beweis der Hilfsrechnung. Für s gilt $\dot{s}(t) = X_{s(t)}$ und damit

$$\ddot{s}(t) = \frac{d}{dt} X_{s(t)} = dX_{s(t)} \dot{s}(t) = dX_{s(t)} X_{s(t)}.$$

Damit können wir explizit $\dot{\alpha}$ und $\ddot{\alpha}$ berechnen:

$$\dot{\alpha}(t) = \langle X_{s(t)}, s(t) \rangle \quad \text{und} \quad \ddot{\alpha}(t) = \langle dX_{s(t)} X_{s(t)}, s(t) \rangle + |X_{s(t)}|^2.$$

Wir kommen nun zu der wesentlichen Rechnung:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) &\geq \langle dX_{s(t)} X_{s(t)}, s(t) \rangle \\ &= \langle (dX_{s(t)} - dX_0 + dX_0) X_{s(t)} + (-dX_0 dX_0 + dX_0 dX_0) s(t), s(t) \rangle \\ &= \langle (dX_{s(t)} - dX_0) X_{s(t)}, s(t) \rangle + \langle dX_0 (X_{s(t)} - dX_0 s(t)), s(t) \rangle + \langle (dX_0)^2 s(t), s(t) \rangle \end{aligned}$$

Jetzt kann man die ersten beiden Terme mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Operatornorm Ungleichung nach unten abschätzen. Für den letzten Term benutzt man einfach die Symmetrie von dX_0 .

$$\geq - \|dX_{s(t)} - dX_0\| \cdot |X_{s(t)}| \cdot |s(t)| - \|dX_0\| \cdot |X_{s(t)} - dX_0 s(t)| \cdot |s(t)| + |dX_0 s(t)|^2,$$

Wenn wir den ersten und zweiten Term nach unten gegen $-\frac{\varepsilon}{2}|s(t)|$ abschätzen können, ist der Beweis fertig. Die Argumentation funktioniert so: Für den ersten Term benutzt man, dass $dX: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig in 0 und X stetig in 0 (mit $X_0 = 0$) ist. Wegen der Eigenschaft (**) finden wir ein $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, so dass $\forall t > t_0$

$$\|dX_{s(t)} - dX_0\| \cdot |X_{s(t)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit dem zweiten Term verfährt man ähnlich wobei man hier ausnutzt, dass X in 0 differenzierbar ist und $X_0 = 0$ ist. t_0 wird natürlich so groß gewählt, dass beide Abschätzungen gleichzeitig erfüllt sind. \square

Wir kehren zum Beweis von Lemma 2.1.8 zurück. Setze

$$\sqrt{c} := \inf_{v \in S^{n-1}} |dX_0 v|.$$

Da dX_0 regulär ist, folgt $\sqrt{c} > 0$. Aus der Hilfsrechnung folgern wir

$$\ddot{\alpha}(t) \geq |dX_0 s(t)|^2 - \varepsilon |s(t)|^2 \geq (c - \varepsilon) |s(t)|^2.$$

Setzen wir $\varepsilon = \frac{c}{2}$, so folgt insbesondere

$$\ddot{\alpha}(t) \geq \frac{c}{2} |s(t)|^2 = c \cdot \alpha(t) \quad \text{für alle } t \geq t_0. \quad (\diamond)$$

Wir definieren

$$\alpha_0(t) := \alpha(t_0) e^{-\sqrt{c}(t-t_0)} \quad \text{und} \quad \Delta(t) := \alpha(t) - \alpha_0(t).$$

Wir rechnen nach, dass sich für Δ die Ungleichung (\diamond) vererbt:

$$\ddot{\Delta}(t) = \ddot{\alpha}(t) - \ddot{\alpha}_0(t) = \ddot{\alpha}(t) - c\alpha_0(t) \geq c\alpha(t) - c\alpha_0(t).$$

D.h. es gilt

$$\ddot{\Delta}(t) \geq c\Delta(t) \quad \text{für alle } t \geq t_0 \quad (\diamond\diamond)$$

Behauptung: $\Delta(t)$ nimmt für alle $t \geq t_0$ keine positive Werte an. Angenommen es gäbe ein $t' > t_0$ mit $\Delta(t') > 0$. Dann hat Δ wegen $\Delta(t_0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0$ ein positives Maximum \tilde{t} . Das impliziert aber $\ddot{\Delta}(\tilde{t}) \leq 0$ was Ungleichung $(\diamond\diamond)$ widerspricht. Es muss also $\Delta(t) \leq 0$ sein und damit folgt

$$\alpha(t) \leq \alpha(t_0) e^{-\sqrt{c}(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \geq t_0. \quad \square$$

Satz 2.1.9. Sei F wie in (Δ) definiert und sei $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ eine glatte Kurve, die folgende zwei Bedingungen erfülle:

(i) c ist eine Integralkurve des Gradienten-Vektorfeldes von f , d.h. c löst die ODE

$$\dot{c}(t) = -\text{grad } f \circ c(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}; \quad (*)$$

(ii) c erfüllt die Konvergenz-Bedingungen $\lim_{t \rightarrow -\infty} c(t) = x$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = y$.

Dann ist die (kanonische) Fortsetzung $\bar{c}: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M$ eine glatte Abbildung.

Kommentar 2.1.10. Anders ausgedrückt, ist der Inhalt von Satz 2.1.9 die Gleichung

$$\mathcal{M}_{x,y}^f = F^{-1}(0).$$

Wir werden in Kapitel 2.3 darauf eingehen, wie $\mathcal{M}_{x,y}^f$ mithilfe von F die Struktur einer endlich-dimensionalen Banach-Untermannigfaltigkeit erhält.

Beweis (von Satz 2.1.9). Die Konvergenz-Bedingung $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} c(t) = y/x$ impliziert, dass $\bar{c} \in \mathcal{C}_{x,y}^0(\overline{\mathbb{R}}, M)$ ist. Wir zeigen, dass $\bar{c} \in \mathcal{C}_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M)$ ist. Mit dem Regularitätsargument aus Proposition 2.1.6 folgt dann, dass $\bar{c} \in \mathcal{C}_{x,y}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, M)$ ist. Es gilt

$$\bar{c} \in \mathcal{C}_{x,y}^1(\overline{\mathbb{R}}, M) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{c} := \bar{c} \circ h^{-1} \in \mathcal{C}_{x,y}^1([-1, 1], M).$$

Für $t \in \mathbb{R}$ rechnet man leicht nach, dass

$$\dot{\tilde{c}} \circ h(t) = \dot{c}(t) \cdot \frac{1}{\dot{h}(t)} = \dot{c}(t) \cdot (1+t^2)^{3/2}$$

gilt. Wenn wir zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{c}(t) \cdot (1+t^2)^{3/2} \rightarrow 0 \quad (\#)$$

gilt, dann folgt daraus die Stetigkeit von $\dot{\tilde{c}}$ in ± 1 , d.h. \tilde{c} ist dann eine \mathcal{C}^1 -Kurve (was den Beweis abschließt). Betrachte den Fall $t \rightarrow +\infty$. Sei (U, φ) eine zentrierte Karte um y und sei $(TU, d\varphi)$ die induzierte Bündel-Karte im Tangentialbündel. Setze

$$X := \text{pr}_{\mathbb{R}^n} \circ d\varphi \circ (-\text{grad } f) \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Das Vektorfeld X und die Integralkurve $s := \varphi \circ c$, wobei man c geeignet einschränken muss, erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 2.1.8. Es gilt also die Ungleichung (***) für s . Wenn wir zeigen können, dass die Ungleichung (***) für \dot{s} gilt, dann folgt Gleichung (#). Da s eine Integralkurve ist, gilt $\dot{s} = X \circ s$. Da X in 0 Lipschitzstetig ist (sagen wir mit Lipschitz-Konstante $L > 0$), gilt

$$\left| \frac{d}{dt} s(t) \right| = \|X \circ s\| \leq L \|s\| \leq c \cdot e^{-\epsilon t},$$

wobei t groß genug sein muss. Das zeigt $\dot{\tilde{c}}(t) \rightarrow 0$. Der Fall $t \rightarrow -\infty$ ergibt sich aus Symmetriegründen. \square

2.2. Fredholm Abbildungen und relativer Morse-Index

In diesen Abschnitt möchten wir zeigen, dass F aus (Δ) eine Fredholm-Abbildung ist, d.h. wir werden zeigen, dass dF ein Fredholm-Operator ist. Außerdem werden wir den Fredholm-Index von dF mit dem relativen Morse-Index in Verbindung setzen.

I. Ein Fredholm-Operator auf dem trivialen Bündel

Für diesen Abschnitt sei $H^{1,2} := H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{1,2}$, $L^2 := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{0,2}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

Definition 2.2.1. Wir setzen

$$\mathcal{S} := \{A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \mid A \text{ ist selbstadjungiert}\}$$

und

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}) \mid A_{\pm\infty} \in \mathcal{S}\}.$$

Für $A \in \mathcal{S}$ definieren

$$\mu(A) := \#(\sigma(A) \cap (-\infty, 0)),$$

wobei $\sigma(A)$ das (endliche) Spektrum von A bezeichnet. Wir nennen $\mu(A)$ den **Morse-Index** von A . Für $A \in \mathcal{A}$ nennt man die Zahl $\mu(A_{-\infty}) - \mu(A_{+\infty})$ den **relativen Morse-Index** von A .¹

Kommentar 2.2.2. \mathcal{A} ist kein Vektorraum, sondern eine offene Teilmenge von

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}) \mid A_{\pm} := A(\pm\infty) \in \tilde{\mathcal{S}}\},$$

wobei $\tilde{\mathcal{S}} := \{A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R} \mid A \text{ ist selbstadjungiert}\}$ sei. Das sieht man wie folgt: Auswerten an einem Punkt $f_t: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$, $A \mapsto A_t$ ist ein stetiger Operator. Weiterhin gilt

$$\mathcal{A} = (\det \circ f_{+\infty})^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0) \cap (\det \circ f_{-\infty})^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0),$$

was zeigt, dass \mathcal{A} offen in $\tilde{\mathcal{A}}$ ist.

Kommentar 2.2.3. Wir erinnern an Kommentar 1.4.41. Dort haben wir gezeigt, dass wir den beschränkten Operator $d(F^{\mathrm{loc}})_s$ mit einem Operator

$$F_A: H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad s \mapsto \dot{s} + A_*s,$$

identifizieren können. Hier ist $A \in \mathcal{A}$ mit $(A_*s)(t) := A_t s(t)$. Für den Rest dieses Abschnittes bezeichne F_A den obigen Operator. Es ist klar, dass $F_A \in L(H^{1,2}, L^2)$ ist. Weiterhin ist es klar, dass der relative Morse-Index $\mu(A)$ mit den relativen Morse-Index von f zwischen x, y übereinstimmt, d.i. die Zahl $\mu(x) - \mu(y)$ (x, y waren in Kommentar 1.4.41 fest gewählt).

Das Ziel dieses Abschnittes ist das nächste

Theorem 2.2.4. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann ist F_A ein Fredholm Operator und der Fredholm-Index F_A ist der relative Morse-Index von A , d.h. es gilt

$$\mathrm{index} F_A = \mu(A_{-\infty}) - \mu(A_{+\infty}).$$

¹In der Literatur bezeichnet man die ganze Zahl $\mu(A_{+\infty}) - \mu(A_{-\infty})$ als den Spektralfluss von A . Er zählt wie viele Eigenwerte am Schluss zu den negativen Eigenwerten hinzugekommen bzw. wie viele abgewandert sind.

Dieses Theorem werden wir in mehreren Etappen beweisen. Den endgültigen Beweis bringen wir erst im nächsten Abschnitt. Wir zeigen zuerst den folgenden

Satz 2.2.5. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig, dann ist F_A ein Fredholm Operator.

Wir erinnern an den Begriff *Semi-Fredholm Operator* (vgl. Definition 1.1.46) und an das *Semi-Fredholm Lemma* (vgl. Lemma 1.1.53).

Lemma 2.2.6. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig, dann ist der Operator $F_A: H^{1,2} \rightarrow L^2$ ein Semi-Fredholm Operator.

Setzt man das Lemma 2.2.6 voraus, dann ist der Beweis von 2.2.5 nicht schwierig.

Beweis (von Satz 2.2.5). Wegen 2.2.6 reicht es zu zeigen, dass $\dim \operatorname{coker} F_A < \infty$ ist. Da L^2 ein Hilbertraum ist, gilt die Isomorphie

$$\operatorname{coker} F_A \cong (\operatorname{Im} F_A)^\perp.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\operatorname{Im} F_A^\perp$ endlich-dimensional ist. Dafür zeigen wir, dass

$$(\operatorname{Im} F_A)^\perp \subseteq \ker F_{-tA}$$

ist. Mit Lemma 2.2.6 folgt dann die Behauptung. Sei $r \in (\operatorname{Im} F_A)^\perp$ beliebig. Dann gilt

$$\langle r, \dot{s} + As \rangle_{0,2} = 0, \quad \text{für alle } s \in H^{1,2}.$$

Insbesondere gilt dann für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, die Gleichung

$$\langle r, \dot{\varphi} \rangle_{0,2} = -\langle {}^tAr, \varphi \rangle_{0,2}.$$

D.h. es gilt sogar $r \in H^{1,2}$ und die schwache Ableitung von r lautet tAr . Damit gilt

$$\dot{r} - {}^tAr = 0,$$

d.h. $r \in \ker F_{-tA}$. Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 2.2.7. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt sogar

$$\operatorname{coker} F_A \cong \ker F_{-tA}.$$

Beweis von Korollar 2.2.7. Wegen des obigen Beweises muss man nur noch

$$(\operatorname{Im} F_A)^\perp \supseteq \ker F_{-tA}$$

zeigen. Sei $r \in \ker F_{-tA}$. Dann gilt $\dot{r} = {}^tA$. Wegen der Definition der schwachen Ableitung gilt für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\langle r, \dot{\varphi} \rangle_{0,2} = -\langle {}^tAr, \varphi \rangle_{0,2} \Leftrightarrow \langle r, F_A \varphi \rangle_{0,2} = 0.$$

Es ist $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine dichte Teilmenge von $H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und da F_A ein beschränkter Operator ist, ist

$$F(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)) \subseteq F(H^{1,2})$$

eine dichte Teilmenge. Damit gilt für alle $s \in H^{1,2}$

$$\langle r, F_A s \rangle_{0,2} = 0,$$

was die Behauptung zeigt. □

Kommentar 2.2.8. Bevor wir Lemma 2.2.6 beweisen, bemerken wir, dass die Aussage

$$\dim(\ker F_A) < \infty$$

einfach zu zeigen ist. Beachte dazu, dass $s \in \ker F_A$ genau dann, wenn $s \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und die ODE

$$\dot{s} = -A_* s$$

löst. Bekanntermaßen ist der Lösungsraum der obigen ODE ein Vektorraum mit Dimension n . Damit ist $\ker F_A$ ein Untervektorraum eines n -dimensionalen Vektorraums, also insbesondere endlich-dimensional.

Die Schwierigkeit beim Beweis von Lemma 2.2.6 liegt darin zu zeigen, dass $\text{Im } F_A$ abgeschlossen ist. Dafür werden wir das Semi-Fredholm-Lemma (Lemma 1.1.53) benutzen.

Beweis (von Lemma 2.2.6). Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.

1.Schritt: Sei $A \in \mathcal{A}$ eine konstante Abbildung von $\overline{\mathbb{R}}$ nach \mathcal{S} . Dann gibt es ein $c = c(A) > 0$, so dass

$$\|s\|_{1,2} \leq c \|F_A s\|_{0,2} \quad \text{für alle } s \in H^{1,2}.$$

Beweis von Schritt 1. Wir zeigen eine stärkere Aussage. Betrachte $H_{\mathbb{C}^n}^{1,2} := H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, $L_{\mathbb{C}^n}^{1,2} := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und

$$F: \mathcal{A} \rightarrow L(H_{\mathbb{C}^n}^{1,2}, L_{\mathbb{C}^n}^2), \quad A \mapsto F_A.$$

Im Anhang A.3 haben wir ausgeführt, wie man das Skalarprodukt von $H^{1,2}$ bzw. L^2 auf den Raum $H_{\mathbb{C}^n}^{1,2}$ bzw. $L_{\mathbb{C}^n}^2$ erweitern kann. Wir zeigen nun die Aussage für dieses „vergrößerte“ F . Sei $\mathcal{F}: L_{\mathbb{C}^n}^2 \rightarrow L_{\mathbb{C}^n}^2$ die Fourier-Plancherel Transformation (d.i. die isometrische Erweiterung der Fourier Transformation, die auf den Schwartz Raum eingeschränkt worden ist; vgl. [Wero7, V.2]). \mathcal{F} ist eine Isometrie, d.h. sie erfüllt $\|\mathcal{F}s\| = \|s\|$. Weiterhin ist bekannt, dass \mathcal{F} die Gleichung

$$\mathcal{F}(\dot{s}) = it\mathcal{F}(s), \quad \text{für alle } s \in H_{\mathbb{C}^n}^{1,2}$$

erfüllt, wobei t hier die Identität $t \mapsto t$ bezeichne (vgl. [Wero7, V.2.11]). Da A konstant und \mathcal{F} linear ist, gilt auch die Identität $\mathcal{F}(As) = A\mathcal{F}(s)$. Damit erhält man

$$F_A = \mathcal{F}^{-1}(it + A)\mathcal{F}.$$

Wir führen zuerst eine formale Rechnung durch und rechtfertigen sie anschließend:

$$\begin{aligned}\|s\|_{1,2}^2 &= \|\mathcal{F}s\|_{1,2}^2 = (1+t^2)\|\mathcal{F}s\|_{0,2}^2 = \|(1+t^2)^{1/2}\mathcal{F}s\|_{0,2}^2 \\ &= \|\mathcal{F}^{-1}(1+t^2)^{1/2}(it+A)^{-1}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(it+A)\mathcal{F}s\|_{0,2}^2 \\ &\leq \|\mathcal{F}^{-1}(1+t^2)^{1/2}(it+A)^{-1}\mathcal{F}\|_{L(H_{\mathbb{C}^n}^{1,2}, L_{\mathbb{C}^n}^2)}^2 \|\mathcal{F}^{-1}(it+A)\mathcal{F}s\|_{0,2}^2 \leq c^2\|F_{A^S}\|_{0,2}^2.\end{aligned}$$

Wir müssen rechtfertigen, dass $(it+A)^{-1}$ existiert und c^2 angeben. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Es ist leicht zu sehen, dass der Operator $(it+A): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ein Inverses besitzt, denn wegen $A \in \mathcal{S}$ gilt für das Spektrum

$$0 \notin it + \sigma(A) = \sigma(it+A),$$

also liegt 0 in der Resolventenmenge von $(it+A)$, d.h. $\ker(it+A) = 0$. Sei $\lambda_0 := \min|\sigma(A)|$. Es gilt

$$\|(it+A)^{-1}\| = \sup_{\lambda \in \sigma(it+A)} |\lambda^{-1}| = \sup_{\lambda \in (it+\sigma(A))} \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2 + t^2}}.$$

Damit erhalten wir aber sofort

$$\|(1+t^2)^{1/2}(it+A)^{-1}\|_{L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} \leq \sqrt{\frac{1+t^2}{\lambda_0^2 + t^2}} \leq \max\left(\frac{1}{\lambda_0}, 1\right) =: c,$$

wobei man die letzte Ungleichung durch eine Fallunterscheidung ($\lambda_0 < 1$ bzw. $\lambda_0 \geq 1$) erhält. Da c nicht von t abhängt, folgt die Behauptung. \square

2.Schritt: Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gibt es ein $T = T(A) > 0$ und ein $c = c(T) > 0$, so dass gilt:

$$\|s\|_{1,2} \leq c\|F_{A^S}\|_{0,2} \quad \text{für alle } s \in H^{1,2} \text{ mit } s|_{[-T, T]} = 0.$$

Beweis von Schritt 2. Wegen Schritt 1, können wir

$$c := \max\{c(A_{+\infty}), c(A_{-\infty})\}$$

setzen und es gilt

$$\|s\|_{1,2} \leq c\|F_{A_{\pm\infty}}s\|_{0,2} \quad \text{für alle } s \in H^{1,2}.$$

Wegen der Stetigkeit von A existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $T = T(\varepsilon) > 0$ mit

$$\begin{aligned}\|A_{-\infty} - A_t\| &\leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \leq -T \text{ und} \\ \|A_{+\infty} - A_t\| &\leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq T.\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon < \frac{1}{c}$. Sei $s \in H^{1,2}$ mit $s|_{[-T, T]} = 0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|s\|_{1,2} &= \|\mathbf{1}_{(-\infty, -T)}s\|_{1,2} + \|\mathbf{1}_{(T, +\infty)}s\|_{1,2} \\ &\leq c(\|\mathbf{1}_{(-\infty, -T)}F_{A_{-\infty}}s\|_{0,2} + \|\mathbf{1}_{(T, +\infty)}F_{A_{+\infty}}s\|_{0,2}) \\ &\leq c(\|\mathbf{1}_{(-\infty, -T)}(F_{A_{-\infty}} - F_A)\|_{L(H^{1,2}, L^2)}\|\mathbf{1}_{(-\infty, -T)}s\|_{0,2} + \|\mathbf{1}_{(-\infty, -T)}F_A s\| \\ &\quad + \|\mathbf{1}_{(T, +\infty)}(F_{A_{+\infty}} - F_A)\|_{L(H^{1,2}, L^2)}\|\mathbf{1}_{(T, +\infty)}s\|_{0,2} + \|\mathbf{1}_{(T, +\infty)}F_A s\|_{0,2}) \\ &\leq c\varepsilon\|s\|_{1,2} + c\|F_A s\|_{0,2}. \end{aligned}$$

Damit folgt aber

$$\|s\|_{1,2} \leq \frac{c}{1 - c\varepsilon} \|F_A s\|_{0,2}. \quad \square$$

3.Schritt: Wir zeigen jetzt, dass F die Voraussetzungen von Lemma 1.1.53 erfüllt.

Wir wählen zu A ein $T = T(A) > 0$ und konstruieren eine Abschneidefunktion $\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ mit

$$\lambda_{[-T, T]} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathbb{R} \setminus [-T-1, T+1]} = 0.$$

Sei $s \in H^{1,2}$ beliebig. Der Trick ist jetzt Schritt 2 auf $(1 - \lambda)s$ anzuwenden und λs direkt abzuschätzen. Man kann ausrechnen, dass die Gleichung $|\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dt}(\lambda s) + \sqrt{2} A_* \lambda s|^2 \geq 0$ äquivalent ist zu

$$\left| \frac{d}{dt}(\lambda s) + A_* \lambda s \right|^2 \geq \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt}(\lambda s) \right|^2 - |A_*(\lambda s)|^2$$

und mit $c_1 := \max_{t \in [-T-1, T+1]} \|A_t\|$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{-T-1}^{T+1} \left| \frac{d}{dt} \lambda(t)s(t) + A_t \lambda(t)s(t) \right|^2 dt \\ \geq \frac{1}{2} \int_{-T-1}^{T+1} \left| \frac{d}{dt} (\lambda(t)s(t)) \right|^2 dt - c_1 \int_{-T-1}^{T+1} |\lambda(t)s(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Durch leichtes Nachrechnen erhält man ein $c_2 = c_2(c_1) > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \|\lambda s\|_{1,2}^2 &= \int_{-T-1}^{T+1} \left(|\lambda s|^2 + \left| \frac{d}{dt}(\lambda s) \right|^2 \right) dt \leq c_2^2 \int_{-T-1}^{T+1} (|\lambda s|^2 + |F_A \lambda s|^2) dt \\ &= c_2^2 (\|\lambda s\|_{0,2}^2 + \|F_A(\lambda s)\|_{0,2}^2) \end{aligned}$$

gilt. Damit folgt

$$\|\lambda s\|_{1,2} \leq c_2 (\|\lambda s\|_{0,2} + \|F_A(\lambda s)\|_{0,2}) = c_2 (\|\lambda s\|_{0,2} + \|\dot{\lambda} s\|_{0,2} + \lambda \|F_A s\|_{0,2}).$$

Weiterhin gibt es nach dem 2.Schritt ein $c_3 = c_3(T) > 0$ mit

$$\|(1 - \lambda)s\|_{1,2} \stackrel{2.\text{Schritt}}{\leq} c_3 \|F_A(1 - \lambda)s\|_{0,2} \leq c_3 ((1 - \lambda)\|F_A s\|_{0,2} + \|\dot{\lambda} s\|_{0,2}).$$

Zusammen erhält man

$$\begin{aligned} \|s\|_{1,2} &\leq \|\lambda s\|_{1,2} + \|(1-\lambda)s\|_{1,2} \\ &\leq c_4(\|\lambda s\|_{0,2} + \|\dot{\lambda}s\|_{0,2} + \|F_A s\|_{0,2}), \end{aligned}$$

für ein geeignetes $c_4 = c_4(c_3, c_2) > 0$. Man kann eine Folge $(\lambda_n) \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ von Abschneidefunktionen konstruieren die gegen die charakteristische Funktion $1_{(-T-1, T+1)}$ konvergiert und ein passendes $c = c(c_4) > 0$ finden, so dass

$$\|s\|_{1,2} \leq c(\|s\|_{L^2((-T-1, T+1), \mathbb{R}^n)} + \|F_A s\|_{0,2}),$$

gilt. Wir schließen den Beweis ab, indem wir zeigen, dass

$$H^{1,2} \rightarrow L^2((-T-1, T+1), \mathbb{R}^n), \quad s \mapsto s|_{(-T-1, T+1)}$$

ein kompakter Operator ist. Die Einschränkung

$$H^{1,2} \rightarrow H^{1,2}((-T-1, T+1), \mathbb{R}^n), \quad s \mapsto s|_{(-T-1, T+1)}$$

ist ein beschränkter Operator. Die Inklusion

$$H^{1,2}((-T-1, T+1), \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2((-T-1, T+1), \mathbb{R}^n)$$

ist wegen den Einbettungssatz von Rellich (Satz 1.4.7) ein kompakter Operator ist. Nach Satz 1.1.52 (iii) ist die Komposition eines beschränkten Operators mit einen kompakten Operator wieder ein kompakter Operator. Das zeigt die Behauptung. \square

II. Berechnung eines Fredholm-Index

Für diesen Abschnitt sei $(H^{1,2}, \|\cdot\|_{1,2})$, $(L^2, \|\cdot\|_{0,2})$, $A \in \mathcal{A}$ und F_A wie im letzten Abschnitt.

Definition 2.2.9. Wir setzen

$$\Sigma := F(\mathcal{A}) = \{F_A \in L(H^{1,2}, L^2) \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq F(H^{1,2}, L^2)$$

und für $F_A \in \Sigma$ definieren wir

$$\Theta_{F_A} := \{F_B \in \Sigma \mid B_{\pm\infty} = A_{\pm\infty}\}.$$

Weiterhin definieren wir die Abbildung

$$F: \mathcal{A} \rightarrow \Sigma, \quad A \mapsto F_A.$$

Kommentar 2.2.10. Die Abbildung F ist stetig, denn für $A, B \in \mathcal{A}$ und $s \in H^{1,2}$ rechnet man:

$$\|(F_A - F_B)s\|_{0,2} \leq \|A - B\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \text{Mat}_n \mathbb{R})} \|s\|_{0,2} \leq \|A - B\| \cdot \|s\|_{1,2}.$$

Das impliziert die gewünschte Ungleichung

$$\|F_A - F_B\|_{L(H^{1,2}, L^2)} \leq \|A - B\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, \text{Mat}_n \mathbb{R})}.$$

Lemma 2.2.11. Sei $A \in \mathcal{A}$ fest. Es gelten folgende Aussagen:

(i) Die Menge $\{B \in \mathcal{A} \mid B_{\pm} = A_{\pm}\}$ ist konvex.

(ii) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $B_{\pm} = A_{\pm}$. Dann gilt

$$\text{index}(F_A) = \text{index}(F_B),$$

d.h. der Index von F_A hängt nur von den Endpunkten von A ab.

Beweis. Zu (i): Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $B_{\pm} = A_{\pm}$. Für die Konvex-Linearkombination $\lambda A + (1 - \lambda)B$ gilt

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)_{\pm} = \lambda A_{\pm} + (1 - \lambda)B_{\pm} = A_{\pm},$$

was die Behauptung zeigt.

Zu (ii): Da jede konvexe Teilmenge insbesondere wegzusammenhängend ist und die Abbildungen $F: \mathcal{A} \rightarrow \Sigma$ und $\text{index}: F(H^{1,2}, L^2) \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig sind (vgl. Kommentar 2.2.10 und Satz 1.1.55), folgt die Behauptung. \square

Kommentar 2.2.12. Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A_{\pm} = B_{\pm}$ gilt i.Allg.

$$\ker(F_B) \neq \ker(F_A),$$

aber der Index der Fredholm-Operatoren bleibt gleich.

Um eine kohärente Orientierung definieren zu können (was in dieser Arbeit nicht gemacht wird) benötigt man eine stärkere Aussage über die Topologie von Θ_{F_A} . Das nächste Lemma ist für das Verständnis von Theorem 2.2.4 nicht nötig und kann übersprungen werden.

Lemma 2.2.13. Sei $F \in \Sigma$ beliebig. Die Menge Θ_F ist in Σ zusammenziehbar, wenn wir Σ mit der Spur-Topologie von $L(H^{1,2}, L^2)$ versehen. Insbesondere ist Θ_F wegzusammenhängend.

Beweis. Wir folgend den Gedanken in [Sch93].

Sei $F_{A'} \in \Sigma$ mit $A' \in \mathcal{A}$, beliebig aber fest und setze $\Theta := \Theta_{F_{A'}}$. Für $F_A \in \Theta$ mit $A \in \mathcal{A}$ ist $A_t \in \text{Mat}_n \mathbb{R}$ und wir setzen, wobei wir die Notation etwas überlasten, $A: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$, $A(\tau) = (1 - \tau)A + \tau A'$, d.h. es soll gelten

$$A(\tau)_t = (1 - \tau)A_t + \tau A'_t \in \text{Mat}_n \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass $A(\tau)_\pm = (1 - \tau)A_\pm + \tau A'_\pm = A'_\pm$, d.h. $F_{A(\tau)} \in \Theta$ für alle τ . Wir definieren eine „lineare“ Homotopie \mathbf{F} zwischen F und F_A

$$\mathbf{F}: [0, 1] \times \Theta \rightarrow \Theta, \quad \mathbf{F}(\tau, F_A) = F_{A(\tau)}.$$

Es ist $\mathbf{F}(0, F_A) = F_A$ und $\mathbf{F}(1, F_A) = F_{A_0}$. Es fehlt nur noch die Stetigkeit von \mathbf{F} . Sei $(\tau_n, F_{A^{(n)}}) \rightarrow (\tau, F_A)$. Zu zeigen ist $F_{A^{(n)}(\tau_n)} \rightarrow F_{A(\tau)}$. Angenommen \mathbf{F} ist nicht stetig. Unter Beibehaltung der alten Bezeichnung gibt es eine Teilfolge für die gilt

$$\|F_{A(\tau)} - F_{A^{(n)}(\tau_n)}\|_{L(H^{1,2}, L^2)} \geq \varepsilon > 0.$$

Nach Definition der Operatornorm gibt es eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^{1,2}$ mit $\|u_n\|_{1,2} = 1$ und

$$\|(A(\tau) - A^{(n)}(\tau_n))u_n\|_{0,2} \geq \varepsilon.$$

Die nachfolgende Rechnung erzeugt einen Widerspruch:

$$\begin{aligned} \|(A(\tau) - A^{(n)}(\tau_n))u_n\|_{0,2} &= \|((1 - \tau)A + \tau A')u_n - ((1 - \tau_n)A^{(n)} + \tau_n A')u_n\|_{0,2} \\ &\leq \|(A - A^{(n)})u_n\| + \|(\tau - \tau_n)A'u_n\| \\ &\quad + \|(\tau_n - \tau)Au_n\| + \|\tau_n(A^{(n)} - A)u_n\| \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.2.14. Sei $A \in \mathcal{A}$. Es existieren dann $D \in \mathcal{A}$ von der Form

$$D_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix},$$

so dass die stetigen Abbildungen $\lambda_i(t)$ für $|t| \geq 1$ konstant sind. Weiterhin gilt in den Endpunkten $\pm\infty$

$$D_{\pm\infty} = D_\pm := \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^\pm \end{pmatrix},$$

wobei D_\pm Normalformen von A_\pm sind, so dass die λ_i^\pm nach „dem Vorzeichen“ geordnet sind, d.h. $\operatorname{sgn} \lambda_i^\pm \geq \operatorname{sgn} \lambda_{i+1}^\pm$ für $i = 1, \dots, n-1$. Der Index dieses D lautet

$$\operatorname{index} F_D = \operatorname{index} F_A.$$

Beweis. Da A_\pm selbstadjungiert sind, existierten $C_\pm \in \operatorname{GL}_n \mathbb{R}$ mit

$$C_\pm A_\pm C_\pm^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^\pm \end{pmatrix} = D_\pm. \quad (*)$$

Wir behaupten, dass man C_\pm so wählen kann, dass

- (i) die λ_i^\pm nach „dem Vorzeichen“ geordnet sind und

- (ii) $\det C_{\pm} > 0$ ist, d.h. C_{\pm} sollen in derselben Wegzusammenhangs-Komponente $GL_n^+ \mathbb{R} := \det^{-1} \mathbb{R}_{>0} \cap GL_n \mathbb{R}$ von $GL_n \mathbb{R}$ liegen.

Um Bedingung (i) zu erfüllen, kann man die Spalten von C_{\pm} so vertauschen, dass man die gewünschte Anordnung in D_{\pm} erhält. Falls nun die Bedingung (ii) verletzt ist, d.h. es gilt $\det C_{\pm} < 0$, dann multipliziert man die erste Spalte von C_{\pm} mit (-1) . Die neue Matrix erfüllt dann die Bedingungen (i) und (ii).

Wegen (ii) kann man eine glatte Kurve $C \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}, GL_n \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$C(t) = \begin{cases} C_+ & \text{für } t \geq 1 \\ C_- & \text{für } t \leq 1 \end{cases}$$

konstruieren. Man sieht sofort, dass die induzierten Operatoren

$$C_*: H^{1,2} \rightarrow H^{1,2} \quad \text{bzw.} \quad C_*: L^2 \rightarrow L^2$$

Isomorphismen sind. Mithilfe der Index-Regel (vgl. Satz 1.1.55) sieht man, dass

$$\text{index } C_* F_A C_*^{-1} = \text{index } F_A,$$

ist. Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned} (C_* F_A C_*^{-1})(s)(t) &= C_t \cdot \left(\frac{d}{dt} + A_t \right) C_t^{-1} s(t) \\ &= C_t \frac{d}{dt} (C_t^{-1}) s(t) + \underbrace{C_t C_t^{-1}}_{=1} \dot{s}(t) + C_t A_t C_t^{-1} s(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + C_t \frac{d}{dt} (C_t^{-1}) + C_t A_t C_t^{-1} \right) s(t) = (F_{C \frac{d}{dt} (C^{-1}) + C A C^{-1}} s)(t). \end{aligned}$$

Für $|t| \geq 1$ haben wir $\frac{d}{dt} (C^{-1})(t) = 0$ und wegen (*) erhalten an den Punkten $\pm\infty$ die Diagonalmatrizen

$$\left(C \frac{d}{dt} (C^{-1}) + C A C^{-1} \right)_{\pm} = D_{\pm}.$$

I.Allg. können wir nicht davon ausgehen, dass die Matrix $(C \frac{d}{dt} (C^{-1}) + C A C^{-1})$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Diagonalgestalt hat. Wir finden aber sicherlich einen stetigen Matrizen-Weg

$$D \in \mathcal{A}, \quad D_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix},$$

so dass alle $\lambda_i(t)$ für $|t| \geq 1$ konstant sind und so dass $D_{\pm\infty} = D_{\pm}$ gilt. Wegen Lemma 2.2.11 gilt dann

$$\text{index}(F_{C \frac{d}{dt} (C^{-1}) + C A C^{-1}}) = \text{index } F_D. \quad \square$$

Beweis von Theorem 2.2.4. Nach Satz 2.2.5 ist F_A ein Fredholm Operator. Wir müssen also nur noch den Index von F_A berechnen. Dafür können wir nach Lemma 2.2.14 annehmen, dass $A = D$ ist, d.h. A ist von der Gestalt

$$A_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_i(t) = \lambda_i^\pm$ für $|t| \geq 1$ und die λ_i^\pm nach „dem Vorzeichen“ geordnet sind, d.h. es soll gelten

$$\operatorname{sgn} \lambda_i^\pm \geq \operatorname{sgn} \lambda_{i+1}^\pm \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \quad (*)$$

Wir berechnen nun $\dim(\ker F_A)$. Sei $s \in \ker F_A \subseteq H^{1,2}$ mit $s = (s_1, \dots, s_n)$. s löst die (entkoppelte) ODE

$$\dot{s}(t) = -A_t \cdot s(t), \quad \text{bzw.} \quad \dot{s}_i(t) = -\lambda_i(t) \cdot s_i(t) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Damit ist s automatisch eine \mathcal{C}^1 -Kurve. Für $|t| > 1$ kann man die Lösung explizit durch Integration berechnen:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= c_i^+ e^{-\lambda_i^+ t} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall t > 1, \\ s_i(t) &= c_i^- e^{-\lambda_i^- t} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall t < -1, \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $c_i^\pm \in \mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit der Lösung liefert, dass $c_i^+ = 0 \Leftrightarrow c_i^- = 0$ ist. Aus $s \in L^2$ folgen nun die Aussagen:

- (a) Aus $\operatorname{sgn} \lambda_i^+ \leq 0$ folgt $c_i^+ = 0$.
- (b) Aus $\operatorname{sgn} \lambda_i^- \geq 0$ folgt $c_i^- = 0$.

Aussage (a) zeigt man so: Angenommen $c_i^+ \neq 0$, dann müsste $s_i(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, da $s_i \in L^2(\mathbb{R})$ ist. In der obigen (expliziten) Formel für $s_i(t)$ sieht man aber, dass $\exp(-\lambda_i^+ t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 konvergiert. Analog zeigt man die Aussage (b).

Wir weisen nochmal darauf hin, dass für alle $i = 1, \dots, n$ die Ungleichung $\operatorname{sgn} \lambda_i^\pm \neq 0$ gilt, da A_\pm nicht singular sind. Wegen den Ungleichungen (*) gibt es zwei eindeutig bestimmte $i_0, i_1 \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$A_- = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1^-, \dots, \lambda_{i_0}^-}_{\operatorname{sgn}>0}, \underbrace{\lambda_{i_0+1}^-, \dots, \lambda_n^-}_{\operatorname{sgn}<0}), \quad A_+ = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1^+, \dots, \lambda_{i_1}^+}_{\operatorname{sgn}>0}, \underbrace{\lambda_{i_1+1}^+, \dots, \lambda_n^+}_{\operatorname{sgn}<0}).$$

Also müssen i_0, i_1 folgende explizite Formeln erfüllen:

$$\begin{aligned} i_0 &= \#(\sigma(A_-) \cap \mathbb{R}_{>0}) = n - \mu(A_-) \\ i_1 &= \#(\sigma(A_+) \cap \mathbb{R}_{>0}) = n - \mu(A_+). \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Freiheitsgrade von $s \in \ker F_A$ bestimmen. Wegen (b) und (a) gilt $c_j = 0$ für $j = 1, \dots, i_0$ und $j = i_1 + 1, \dots, n$. Falls $i_0 \geq i_1 + 1$ ist, dann muss $\ker F_A = 0$ sein. Falls $i_0 < i_1 + 1$ ist, gilt

$$\#\{j \mid i_0 < j < i_1 + 1\} = i_1 - i_0 = \mu(A_-) - \mu(A_+),$$

d.h. es gilt

$$\dim \ker F_A = \max(\mu(A_-) - \mu(A_+), 0).$$

Weiterhin gilt nach Korollar 2.2.7, dass

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{coker} F_A &= \dim \ker F_{-tA} = \max(\mu(-{}^tA_-) - \mu(-{}^tA_+), 0) \\ &= \max(\mu(A_+) - \mu(A_-), 0). \end{aligned}$$

Eine einfache Fallunterscheidung liefert nun die Behauptung. □

III. Eine Fredholm-Abbildung

Definition 2.2.15. Sei ζ^n ein glattes Vektorbündel über $\overline{\mathbb{R}}$ mit riemannscher Metrik g und kovarianter Ableitung ∇ bzw. ∇_t . Sei $A \in \Gamma_{\mathcal{C}^0}(\overline{\mathbb{R}}, \operatorname{End}(\zeta))$, so dass $A_{\pm} := A_{\pm\infty}$ nicht-degeneriert und selbstadjungiert sind. Definiere

$$F_A: H^1(\zeta) \rightarrow L^2(\zeta), \quad F_A s := \nabla_t s + A_* s$$

und setze

$$\Sigma_{\zeta, \nabla} := \{F_A \mid A \in \Gamma_{\mathcal{C}^0}(\overline{\mathbb{R}}, \operatorname{End}(\zeta)) \text{ und } A_{\pm} \text{ nicht-deg. und selbstadj.}\}.$$

Wegen des $\varphi: \zeta \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ aus Satz 1.4.28 ergibt sich Theorem 2.2.4 für ζ sofort als

Korollar 2.2.16. Sei $F_A \in \Sigma_{\zeta, \nabla}$ beliebig. Dann ist F_A ein Fredholm Operator mit Index

$$\operatorname{index} F_A = \mu(A_-) - \mu(A_+).$$

Wegen Kommentar 1.4.41 und dem obigen Korollar erhalten wir weiterhin das nächste

Korollar 2.2.17. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion und sei

$$F: \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \rightarrow L^{2*}TM, \quad c \mapsto \dot{c} + \operatorname{grad} f \circ c.$$

Es ist dann F eine glatte Fredholm-Abbildung. Der Index ist unabhängig vom Punkt $s \in \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ und lautet

$$\operatorname{index} F = \mu(x) - \mu(y).$$

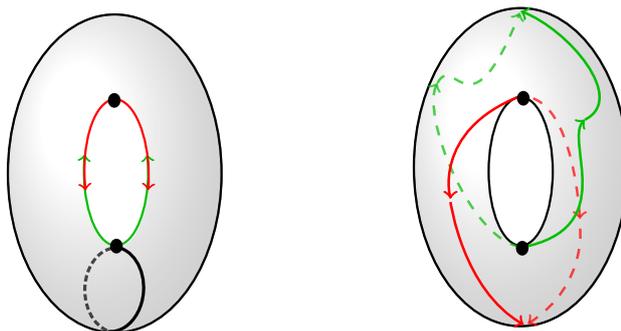


Abbildung 2.1.: Zur Transversalität

2.3. Transversalität

In diesen Abschnitt erhalten wir das Ergebnis, dass der Trajektorienraum für fast alle Metriken g die Struktur einer endlich-dimensionalen Hilbert-Untermannigfaltigkeit trägt. Wir haben „fast alle“ gesagt, da dies nicht für jede Metrik gelten muss. Die Metrik muss die sogenannte *Morse-Smale Bedingung* erfüllen. Wir wollen das anhand von Abbildung 2.1 erklären:

Betrachte den Torus, der auf der x, y -Ebene vom \mathbb{R}^3 steht. Die Morse-Funktion f ist dann die Höhenfunktion, d.h. $f(x, y, z) \mapsto z$. Der Torus trägt die vom \mathbb{R}^3 induzierten riemannschen Metrik (linker Torus im Bild). Sei φ der globale Fluss von $-\text{grad } f$. Wir definieren nun die instabile (engl.: unstable) bzw. stabile (engl.: stable) Mannigfaltigkeit an einem kritischen $x \in M$ durch

$$W^u(x) := \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, p) = x\}, \quad W^s(x) := \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = x\}.$$

Der Schnitt $W^u(x) \cap W^s(y)$ ist gerade die Spur aller Instantonen zwischen x, y . Im linken Bild haben wir x, y als die beiden einzigen kritischen Punkte vom Index 1 gewählt und $W^u(x) \cap W^s(y)$ eingezeichnet. Man erkennt, dass sich $T_p W^u(x)$ und $T_p W^s(y)$ nicht transversal schneiden, d.h. die Standard-Metrik erfüllt nicht die Morse-Smale Bedingung (deshalb nennt man diese Bedingung auch Transversalität-Bedingung). Angenommen wir „stören“ die Metrik um einen kleinen Term, dann haben wir die Situation im linken Bild geben. In diesen Fall ist die Transversalität-Bedingung erfüllt, da der Schnitt $W^u(x) \cap W^s(y)$ leer ist.

I. Ein Transversalitätsergebnis

Man konsultiere Anhang A.1 für die Definition eines Baire Raumes.

Definition 2.3.1. Sei X ein Baire Raum (z.B. ein Banach-Mannigfaltigkeit) und $M \subseteq X$.

²In „Lectures on the h -Cobordismen Theorem“ von Milnor spricht man auch von left-hand Disk und right-hand Disk

- (i) M heißt **nirgends dicht**, wenn der Abschluss \overline{M} keine inneren Punkte besitzt.
- (ii) M heißt von **1. Baire Kategorie**, wenn es eine Folge (M_n) nirgends dichter Mengen in X gibt mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.
- (iii) M heißt von **2. Baire Kategorie**, wenn M nicht von 1. Kategorie ist.
- (iv) Komplemente von Mengen der 1. Baire Kategorie nennt man **residuelle Mengen**.
- (v) M heißt eine **G_δ -Menge**, wenn M ein abzählbarer Schnitt von offenen dichten Teilmengen ist.
- (vi) Wir sagen, dass eine Eigenschaft **für fast alle** $x \in X$ gilt, wenn es eine Ausnahmemenge der 1. Baire Kategorie gibt bzw. wenn die Eigenschaft für eine residuelle Menge zutrifft.

Kommentar 2.3.2. Eine Folgerung des Baireschen Kategoriensatzes (Satz A.1.5) ist, dass Banach-Mannigfaltigkeit Baire-Räume sind. In der Sprache von Definition 2.3.1 sagt er aus, dass residuelle Mengen immer eine G_δ -Teilmenge enthalten. Die Mengen der 1. Baire Kategorie sind also in einem gewissen Sinn vernachlässigbar. Sie stellen ein topologisches Analogon zu den Nullmengen in der Maßtheorie dar.

Satz 2.3.3 (Transversalität). Seien G, M Banach Mannigfaltigkeiten, $\xi = (E, \pi, M, \mathbb{E})$ ein Banach Bündel mit Bündelatlas $(U_n, \varphi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei

$$F: G \times M \rightarrow E$$

eine glatte Familie von glatten Schnitten, d.h. F ist eine glatte Abbildung und für alle $g \in G$ ist $F_g: M \rightarrow E$ ein glatter Schnitt in ξ . F erfülle weiterhin folgende zwei Bedingungen:

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 \in \mathbb{E}$ ein regulärer Wert von

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_n \circ (F|_{(G \times U_n)}): G \times U_n \rightarrow \mathbb{E}.$$

- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ ist

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_n \circ (F_g|_{U_n}): U_n \rightarrow \mathbb{E}$$

eine Fredholm Abbildung mit lokalem Index $r \in \mathbb{Z}$.

Dann ist für fast alle $g \in G$

$$Z_g := F_g^{-1}(0) = \{m \in M \mid F_g(m) = 0\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit lokaler Dimension r .

Kommentar 2.3.4. Beachte das $Z_g = \emptyset$ auch erlaubt ist (das passiert z.B. immer wenn $r < 0$ ist). Das stimmt aber auch mit unserer bisherigen Anschauung überein. Falls der relative Morse-Index negativ ist, muss der Trajektorienraum leer sein, denn für $\alpha \in \mathcal{M}_{x,y}^f$ gilt

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = g_t(\text{grad } f_\alpha, \dot{\alpha}) = -|\text{grad } f_\alpha|_t^2 < 0,$$

woraus man abliest, dass α nur „nach unten“ fließen kann.

Kommentar 2.3.5. Satz 2.3.3 nennt man auch *Transversalitäts-Ergebnis*. Die Aussage von diesen Satz formuliert man auch so: Für fast alle g schneidet Φ_g den Nullschnitt in ζ transversal.

Die Bedingung (i) und (ii) von diesen Satz nennt man die *Morse-Smale Bedingung*.

Im nächsten Beweis notieren wir ausnahmsweise das Differential mit $Df_p: T_p M \rightarrow T_q N$ anstatt mit df_p . Wir erinnern an die Definition 1.2.14 des partiellen Differentials. Auch dieses notieren wir für den nächsten Beweis anders: Für ein gegebenes Differential $DF_{(g,p)}: T_g G \times T_p M \rightarrow T_{F(g,p)} E$ notieren wir die partiellen Differentiale mit

$$D_G F_{(g,p)}: T_g G \rightarrow T_{F(g,p)} E, \quad D_M F_{(g,p)}: T_p M \rightarrow T_{F(g,p)} E.$$

Beweis (von Satz 2.3.3). Wir unterteilen den Beweis in vier Schritte.

1. Schritt: Es reicht die Aussage für $F|_{U_n}$ zu zeigen.

Beweis von Schritt 1. Angenommen $\forall n$ gibt es eine residuelle Menge $\Sigma_n \subseteq G$, so dass für alle $g \in \Sigma_n$

$$(F|_{U_n})_g^{-1}(0) = \{m \in U \mid F_g(m) = 0\} \quad (*)$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von U_n ist. Die Menge $\Sigma := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ ist wieder eine residuelle Menge (vgl. A.1) also insbesondere nicht-leer. Für fast alle $g \in G$ ist also (*) eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von U_n und weil $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = M$, ist auch Z_g eine (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit von M . \square

Wegen Schritt 1 dürfen wir also annehmen, dass ζ das triviale Bündel ist, d.h. es gilt $E = M \times \mathbb{E}$. Indem wir die Notation etwas überlasten bezeichnen wir ab jetzt mit F die Abbildung $F: G \times M \rightarrow \mathbb{E}$, die nach (i) $0 \in \mathbb{E}$ als regulären Wert hat und nach (ii) die Eigenschaft besitzt, dass $F_g := F(g, \cdot)$ eine Fredholm Abbildung mit lokalem Index r ist.

2. Schritt: Es ist $Z := F^{-1}(0) \subseteq G \times M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und für den Tangentialraum gilt

$$T_z Z = \ker DF_z \quad \forall z \in Z \subseteq G \times M. \quad (**)$$

Beweis von Schritt 2. Wir haben die Aussage, dass $\ker DF_z$ spaltet in Lemma 1.1.56 verlegt, da der Beweis von dieser Behauptung zu lang ist, um ihn hier auszuführen. Mit dem Satz vom regulären Wert für Banach Mannigfaltigkeiten (Satz 1.3.19) folgt die Aussage. \square

3. Schritt: Die Einschränkung der Projektion $\text{pr}_G : G \times M \rightarrow G$ auf Z , d.h. $P := \text{pr}_G|_Z$, ist eine Fredholm Abbildung mit $\text{index } P = \text{index } F_g$.

Beweis vom Schritt 3. Betrachte dafür $DP_z : T_z Z \rightarrow \mathbb{E}$ und $DF_z^M : T_m M \rightarrow \mathbb{E}$, wobei $DF_z^M(\xi) := DF_z(0, \xi)$ mit $(0, \xi) \in T_g G \times T_m M = T_z G \times M$ ist. Dann erhält man $\ker DP_z = T_z Z \cap T_m M$ und $\ker DF_z^M : T_m M \cap T_z Z$, d.h. es gilt

$$\ker DP_z = \ker DF_z^M, \quad \text{also insbesondere} \quad \dim DP_z < \infty,$$

da $DF_z^M = D(F_g)_m$ ein Fredholm Operator ist. Es fehlt noch $\dim \text{coker } DP_z < \infty$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass

$$T_g G / \text{Im}(DP_z) \cong \mathbb{E} / \text{Im}(DF_z^M), \quad \text{via} \quad [v]_{\text{Im } DP} \mapsto [DF_z^G v]_{\text{Im}(DF_z^M)},$$

wobei $DF_z G(\xi) := DF_z(\xi, 0)$ mit $(\xi, 0) \in T_g G \times T_m M = T_z G \times M$ ist. Im wesentlichen folgt das aus

$$v = DP_z(v, w) \quad \text{und} \quad DF_z^G v = -D\Phi_z^M w, \quad \forall (v, w) \in T_z Z \quad (\text{vgl. (**)})$$

und daraus, dass $D\Phi_z$ surjektiv ist. Das liefert $\dim \text{coker } DP_z = \dim \text{coker } DF_z^G < \infty$. \square

Nach dem Theorem von Sard-Smale (vgl. Korollar 1.3.25) sind fast alle $g \in G$ reguläre Werte von P . Sei g ein regulärer Wert. Wir wollen zeigen, dass Z_g Untermannigfaltigkeit von M ist. Sei $m \in Z_g \neq \emptyset$. Man kann zeigen, dass

$$D(F_g)_m = DF_{(g,m)}^M : T_m M \rightarrow \mathbb{E}$$

surjektiv ist. Dafür braucht man, dass (g, m) ein regulärer Wert von Φ ist, g ein regulärer Wert von P und Gleichung (**). \square

II. Die Morse-Smale Bedingung für den Trajektorienraum

Definition 2.3.6. Sei $\xi = (E, \pi, M, F)$ ein glattes Vektorbündel mit riemannscher Metrik und kovarianter Ableitung. Sei $\varepsilon := (\varepsilon_k)$ eine Folge positiver reeller Zahlen ε_k . Dann definieren wir für $s \in \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(M, E)$ die Normen

$$|\nabla^k s|(p) := \sup_{v_1, \dots, v_n \in T_p M, |v_i|=1} \nabla_{v_1} \cdots \nabla_{v_k} s(p), \quad \|s\|_\varepsilon := \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \sup_{p \in M} |\nabla^k s|(p).$$

Diese induzieren den Vektorraum (!)

$$\Gamma_{\mathcal{C}^\varepsilon}(M, E) := \{s \in \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(M, E) \mid \|s\|_\varepsilon < \infty\}.$$

Kommentar 2.3.7. Man kann zeigen, dass $(\Gamma_{\mathcal{C}^\varepsilon}(M, E), \|\cdot\|_\varepsilon)$ ein Banachraum ist und es ist nicht schwer zu sehen, dass die Inklusion $\Gamma_{\mathcal{C}^\varepsilon}(M, E) \hookrightarrow \Gamma_{\mathcal{C}^0}(M, E)$ stetig ist. Weiterhin kann man für jedes Vektorbündel ξ ein $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ angeben, so dass $\Gamma_{\mathcal{C}^\varepsilon}(M, E)$ dicht in $L^2(\xi)$ liegt, vgl. [Sch93].

Definition 2.3.8. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei

$$\text{End}_{\text{sym},g}(TM) := \sum_{p \in M} \text{End}_{\text{sym},g}(T_p M),$$

und es bezeichne $\text{End}_{\text{sym},g}(\tau_M)$ das korrespondierende Vektorbündel. Mit

$$\mathcal{T}_{g,p} := \{A \in \text{End}(T_p M) \mid A \text{ ist sym. positiv def. bzgl. } g_p(\cdot, \cdot)\}$$

definieren wir $\mathcal{T}_g := \sum_{p \in M} \mathcal{T}_{g,p}$. Definiere schließlich

$$\mathcal{G}_g := \Gamma_{\mathcal{G}^\varepsilon}(M, \mathcal{T}_g) := \{X \in \Gamma_{\mathcal{G}^\varepsilon}(M, \text{End}_{\text{sym},g}(TM)) \mid X_p \in \mathcal{T}_{g,p} \forall p \in M\}.$$

Kommentar 2.3.9. Es gilt $\mathcal{T}_g \subseteq_o \text{End}_{\text{sym},g}(TM)$ und \mathcal{T}_g ist eine offene Umgebung vom Bild des Schnitts $(p \mapsto \mathbb{1}_{T_p M})$. Wegen der stetigen Inklusion von Kommentar 2.3.7 ist \mathcal{G}_g eine offene Teilmenge von $\Gamma_{\mathcal{G}^\varepsilon}(M, \text{End}_{\text{sym},g}(TM))$ und deshalb eine Banach Mannigfaltigkeit.

Wir „stören“ nun den glatte Schnitt F aus Abschnitt 2.3.III um einen Term $A \in \mathcal{G}_g$: Sei

$$\Phi: \mathcal{G}_g \times \mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M) \rightarrow L^{2*}(TM), \quad c \mapsto \dot{c} + A_* \text{grad } f \circ c.$$

Der „Störterm“ A bedeutet lediglich, dass wir den Gradienten $\text{grad } f$ bzgl. einer anderen riemannschen Metrik, nämlich $g'_p(\cdot, \cdot) := g_p(A \cdot, \cdot)$, bilden. Wie zu erwarten lautet die lokale Trivialisierung von Φ

$$\nabla_t s + \Theta_s \dot{h} + (\nabla_2 \exp_s)^{-1} \circ A \text{grad } f \circ \exp_h s.$$

Bezeichne diese Abbildung mit Φ_A . Man kann zeigen, dass Φ die Voraussetzung (i) und (ii) aus Satz 2.3.3 erfüllen.

Proposition 2.3.10. Für fast alle $A \in \mathcal{G}_g$ ist die Abbildung

$$\Phi_A: H^1(c^* \mathcal{D}) \rightarrow L^2(c^* TM)$$

eine Fredholm Abbildung mit (konstanten) Index $\mu(f, x) - \mu(f, y)$. $0 \in L^2(c^* TM)$ ist ein regulärer Wert von Φ .

Einen Beweis findet man in [Sch93]. Proposition 2.3.10 sagt aus, dass sehr viele Metriken die Morse-Smale Bedingung erfüllen. Wir schließen nun die Diplomarbeit mit folgendem Korollar ab:

Korollar 2.3.11. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Morse Funktion f . Dann gibt es eine Menge G von riemannschen Metriken mit $g \in G$ und für fast alle $g' \in G$ ist der induzierte Trajektorienraum $\mathcal{M}_{x,y}^f$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{P}_{x,y}^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ mit

$$\dim \mathcal{M}_{x,y}^f = \mu(f, x) - \mu(f, y).$$

Beweis. Betrachte, wie bereits diskutiert, die Familie von Schnitten Φ . Eine Kombination von Proposition 2.3.10 und dem Transversalitäts-Ergebnis (Satz 2.3.3) liefert uns, dass für fast alle $A \in \mathcal{G}_g$ die Menge $\Phi_A^{-1}(0)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $\mu(f, x) - \mu(f, y)$ ist. Es bezeichne $\text{grad}' f := A_* \text{grad} f$ der Gradient der bzgl. g' gebildet wird. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_t s + \Theta(s)\dot{h} + (\nabla_2 \exp_s)^{-1} A_* \text{grad} f \circ \exp_h s \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{d}{dt}(\exp_h s) + A_* \text{grad} f \circ \exp_h s = \dot{c} + \text{grad}' f \circ c, \end{aligned}$$

wobei wir $c := \exp_h s$ gesetzt haben. Das zeigt die Behauptung. □

Anhang

In diesem Anhang fassen wir spezielle Ergebnisse aus der Funktionalanalysis zusammen, die unabhängig von den vorherigen Abschnitten gelesen werden können.

A.1. Baire Räume

Baire Räume sind i.Allg. keine Banachräume, d.h. eigentlich keine Objekte der Funktionalanalysis, aber jeder Banachraum ist ein Baire Raum. Letzteres ist die Aussage des Baireschen Kategoriensatzes, der ein wichtiger Existenzsatz der Funktionalanalysis ist. Anschaulich gesprochen sind Baire Räume gerade die topologischen Räume, in denen die Aussage des Baireschen Kategoriensatzes richtig ist. Bevor wir diese Baire Räume definieren, zitieren wir (leicht verallgemeinert) von [Wero7, IV.1.2] den typischen Sprachgebrauch für diese Kategorie.

Definition A.1.1. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

- (a) M heißt **nirgends dicht**, wenn der Abschluss \overline{M} keine inneren Punkte besitzt.
- (b) M heißt von **1. Baire Kategorie**, wenn es eine Folge (M_n) nirgends dichter Mengen in X gibt mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.
- (c) M heißt von **2. Baire Kategorie**, wenn M nicht von 1. Kategorie ist.

Kommentar A.1.2. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte die Vereinigung einer beliebigen Folge $(A_n) \subseteq X$ von abgeschlossenen Mengen

$$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Wenn M von 2. Baire Kategorie ist, dann wissen wir, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ geben muss, so dass das Innere A_n° nicht-leer ist, denn ansonsten wäre M von 1. Baire Kategorie. Aus diesem Grund sollte man die Eigenschaft „von 2. Baire Kategorie sein“ als eine schwache Existenzaussage verstehen.

Kommentar A.1.3. In typischen Anwendungen sind die Mengen von 1. Baire Kategorie genau die Mengen die kein „Gewicht“ haben, d.h. unwesentlich sind. Da wir auf Banachräume kein kanonisches „Lebesgue-Maß“ zur Verfügung haben, also nicht von Nullmengen reden können, suchen wir einen Ersatz durch „Mengen von 1. Baire

Kategorie“, welcher rein topologisch definiert wird. Aus diesen Grund liest man in der Literatur häufig die Formulierung „ M ist eine magere Menge“ anstatt „ M ist von 1. Baire Kategorie“. Eine „nicht-magere Menge“ ist also eine „Menge von 2. Baire Kategorie“.

Definition A.1.4 (Baire Raum). Ein topologischer Raum X heißt **Baire Raum**, wenn er eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (a) Jede nicht-leere offene Menge ist von 2. Baire Kategorie.
- (b) Mengen der 1. Baire Kategorie haben keine innere Punkte.
- (c) Das Komplement jeder Menge der 1. Baire Kategorie liegt dicht in X .
- (d) Abzählbare Schnitte von offenen dichten Mengen liegen wieder dicht.

Die Äquivalenz der obigen vier Aussagen ist nicht so schwer zu zeigen, denn es gilt $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ und $(c) \Leftrightarrow (d)$ ³.

Satz A.1.5 (Bairescher Kategoriensatz). *In einem vollständigen metrischen Raum liegt das Komplement einer Menge der 1. Baire Kategorie dicht, d.h. ein vollständiger metrischer Raum ist ein Baire Raum.*

Kommentar A.1.6. Wir haben in Kommentar 1.1.9 diskutiert, dass der Begriff der Cauchy-Folge nicht rein topologisch erklärt werden kann. Dort haben wir zwei metrische Räume angegeben die homöomorph zueinander sind, aber der eine metrische Raum war vollständig und der andere nicht. Der Bairesche Kategoriensatz sagt nun aber aus, dass wenn ein metrischer Raum vollständig ist (bzw. wenn er vollständig metrisierbar ist), dass es bereits erhebliche Konsequenzen für die unterliegende Topologie hat.

Betrachte $Q = \{x_1, x_2, \dots\}$ mit der Spur-Topologie von \mathbb{R} und definiere $U_n := Q \setminus \{x_n\}$. Jedes U_n liegt dicht in Q , aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$. Insbesondere ist Q nicht vollständig metrisierbar, da es ansonsten ein Baire Raum sein müsste.

A.2. Die Schur-Eigenschaft

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion folgendes Beispiels: Es gibt einen Banachraum X und einen abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq X$, so dass X nicht isomorph ist zu $A \times X/A$.

Definition A.2.1. Sei X ein normierter Raum und $(x_n) \subseteq X$ eine Folge. (x_n) **konvergiert**

³Für die Äquivalenz bemerken wir, dass $\overline{\overline{C}M} = X/\overline{M}^\circ$ ist.

schwach gegen $x \in X$, wenn für alle $\varphi \in X'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

gilt. Wir schreiben auch $x_n \rightharpoonup x$.

Wir sagen, dass ein normierter Raum die **Schur-Eigenschaft** besitzt, wenn aus $x_n \rightharpoonup x$ automatisch $x_n \rightarrow x$ folgt, d.h. schwache Konvergenz impliziert (starke) Norm-Konvergenz.

Beispiel A.2.2. Jeder separable Hilbertraum H besitzt *nicht* die Schur-Eigenschaft. Sei $(e_n) \subseteq H$ eine Hilbertraum-Basis. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $e_n \rightharpoonup 0$. Wegen des Satzes von Pythagoras ist $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ für $n \neq m$ woraus folgt, dass die Folge (e_n) keine Cauchy-Folge ist.

Proposition A.2.3. Sei X, Y normierte Räume, sei $A \subseteq X$ ein Unterraum.

- (i) Wenn X die Schur-Eigenschaft besitzt, dann besitzt auch A die Schur-Eigenschaft.
- (ii) Wenn X isomorph zu Y ist und X die Schur-Eigenschaft besitzt, dann besitzt auch Y die Schur-Eigenschaft.

Der Beweis von Proposition A.2.3 ist sehr einfach. Wir erinnern an die Räume ℓ^1 und ℓ^∞ . ℓ^1 ist der Banachraum der absolut summierbaren Folgen von \mathbb{R} und ℓ^∞ ist der Banachraum der beschränkten Folgen von \mathbb{R} . Die Norm von ℓ^1 lautet $\|(x_n)\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ und die Norm von ℓ^∞ lautet $\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Typischerweise wird in einer Vorlesung über Funktionalanalysis folgender Satz gezeigt:

Satz. Das Bifunktional

$$\ell^1 \times \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_n), (y_n)) \mapsto \langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ist wohldefiniert und beschränkt. Die induzierte Abbildung

$$\ell^\infty \rightarrow (\ell^1)', \quad (y_n) \mapsto \langle \cdot, (y_n) \rangle$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Damit können wir den nächsten Satz zeigen.

Satz A.2.4 (Satz von Schur). ℓ^1 besitzt die Schur-Eigenschaft.

Beweis. Die Beweisidee die wir hier vorstellen stammt aus einem Artikel von Schur [Sch21].

Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $x^k := (x_n^{(k)}) \in \ell^1$ und $x := (x_n) \in \ell^1$. Angenommen $x^k \rightharpoonup x$. O.E. sei $x = 0$.

Hilfsbehauptung 1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = 0$.

Beweis von Hilfsbehauptung 1. Sei $e_n \in \ell^\infty$ die reelle Folge, dessen n -tes Folgenglied 1 sei und jedes andere Folgenglied 0 sei. Da $x^k \rightarrow 0$ ist, folgt insbesondere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k, e_n \rangle = \langle 0, e_n \rangle = 0. \quad \square$$

Hilfsbehauptung 2. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $l = l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} |x_n^{(k)}| < \varepsilon.$$

Angenommen Hilfsbehauptung 2 ist falsch, d.h. $\exists \varepsilon > 0$, so dass es $\forall l \in \mathbb{N}$ ein $k = k(l) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} |x_n^{(k)}| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Hilfsbehauptung 2.1. Sei $l \in \mathbb{N}$ fest. Dann gibt es unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, welche die Ungleichung (*) erfüllen.

Beweis von Hilfsbehauptung 2.1. Angenommen nur $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ erfüllen die Ungleichung (*). Da $x^{k_1}, \dots, x^{k_m} \in \ell^1$ sind, kann man für jedes $\nu = 1, \dots, m$ ein $l_\nu = l_\nu(k_\nu, l) > l$ finden, so dass

$$\sum_{n=l_\nu+1}^{\infty} |x_n^{(k_\nu)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. O.E. sei $l_1 = \max\{l_1, \dots, l_m\}$. Nach Voraussetzung gibt es für l_1 ein $\tilde{k} = \tilde{k}(l_1) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=l_1+1}^{\infty} |x_n^{(\tilde{k})}| \geq \varepsilon$$

ist. Dieses \tilde{k} taucht nun in der Liste $\{k_1, \dots, k_m\}$ nicht auf. Widerspruch! □

Hilfsbehauptung 2.2: Es gibt eine Folge von natürlichen Zahlen $(m_\nu, n_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, so dass wenn wir $s_\nu := n_1 + \dots + n_\nu$ setzen, folgende Ungleichungen gelten: Für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{s_{\nu-1}} |x_n^{(m_\nu)}| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{n=s_{\nu-1}+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| \geq \varepsilon, \quad \sum_{n=s_\nu+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Beweis von Hilfsbehauptung 2.2. Wir konstruieren die Folge (implizit) algorithmisch. Wegen (*) gibt es für $l = 0$ ein m_1 , so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| \geq \varepsilon$$

ist. Da $x^{m_1} \in \ell^1$ ist, gibt es ein $n_1 = n_1(m_1)$, so dass

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ist. Mit Hilfsbehauptung 1, Hilfsbehauptung 2.1 und wegen (*) gibt es ein $m_2 = m_2(n_1) > m_1$, so dass die nächsten beiden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\sum_{n=1}^{n_1} |x_n^{(m_2)}| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |x_n^{(m_2)}| \geq \varepsilon.$$

Da $x^{m_2} \in \ell^1$ ist, gibt es ein $n_2 = n_2(m_2)$, so dass

$$\sum_{n=n_1+n_2+1}^{\infty} |a_n^{(m_2)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ist. Indem man iterativ weiter verfährt, erhält man die gewünschte Zahlenfolge. \square

Wir beweisen nun Hilfsbehauptung 2. Betrachte $(n_\nu, m_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus Hilfsbehauptung 2.2. Für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=s_{\nu-1}+1}^{s_\nu} |x_n^{(m_\nu)}| &= \sum_{n=s_{\nu-1}+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| - \sum_{n=s_\nu+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein $(y_n) \in \ell^\infty$. Für $n = 1, \dots, n_1$ setzen wir

$$y_n := \operatorname{sgn} x_n^{(m_1)}$$

und allgemein für $s_{\nu-1} < n \leq s_\nu$

$$y_n := (-1)^{\nu-1} \operatorname{sgn} x_n^{(m_\nu)}.$$

Wenn ν ungerade ist, dann gilt

$$\langle x^{m_\nu}, y \rangle \geq - \sum_{n=1}^{s_{\nu-1}} |x_n^{(m_\nu)}| + \sum_{n=s_{\nu-1}+1}^{s_\nu} |x_n^{(m_\nu)}| - \sum_{n=s_\nu+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| > -\frac{1}{4}\varepsilon + \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$$

und analog rechnet man für ν gerade aus

$$\langle x^{m_\nu}, y \rangle \leq \sum_{n=1}^{s_{\nu-1}} |x_n^{(m_\nu)}| - \sum_{n=s_{\nu-1}+1}^{s_\nu} |x_n^{(m_\nu)}| + \sum_{n=s_\nu+1}^{\infty} |x_n^{(m_\nu)}| < \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Das widerspricht aber der Voraussetzung $x^k \rightarrow 0$. Damit wurde Hilfsbehauptung 2 gezeigt.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes von Schur. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\|_1 = 0$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Hilfsbehauptung 2 gibt es ein $l = l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} |x_n^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wegen Hilfsbehauptung 1 gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $K = K(1, \dots, l)$, so dass für $\forall k \geq K$ und $\forall v = 1, \dots, l$ gilt

$$|x_v^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Damit folgt für alle $k \geq K$

$$\|x^k\|_1 = \sum_{n=1}^l |x_n^{(k)}| + \sum_{n=l+1}^{\infty} |x_n^{(k)}| < \varepsilon. \quad \square$$

Definition A.2.5. Seien X, Y Banachräume, B_X bzw. B_Y der Einheitsball von X bzw. Y und sei $T: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Wir nennen T eine **Quotientenabbildung**, wenn $T(B_X) = B_Y$ gilt.

Kommentar A.2.6. Wenn $T: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung ist, dann folgt leicht, dass $\|T\| = 1$ ist und dass T surjektiv ist. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass T einen isometrischen Isomorphismus $X/\ker T \cong Y$ induziert.

Die nächste Proposition ist eine Übungsaufgabe in [Wero7].

Proposition A.2.7. Sei X ein separabler Banachraum. Dann gibt es eine Quotientenabbildung $T: \ell^1 \rightarrow X$.

Kommentar A.2.8. Um die obige Proposition zu zeigen, benötigen wir ein technisches Detail aus dem Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28). Wir zitieren hier nochmal dieses Theorem:

Theorem. Seien X, Y Banachräume und sei $T: X \rightarrow Y$ eine surjektiver beschränkter Operator. Dann ist T offen, d.h. T bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Der Beweis der in [Wero7, IV.3.3] steht, lässt sich wie folgt skizzieren: Im 1. Schritt wird gezeigt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $V_\varepsilon \subseteq \overline{T(B_X)}$ ist, wobei V_ε der offene Ball um $0 \in Y$ mit Radius ε sei. Hierfür benötigt man die Vollständigkeit von Y . Im 2. Schritt zeigt man, dass sogar $V_\varepsilon \subseteq T(B_X)$ gilt. Hierfür benötigt man die Vollständigkeit von X . Für den Beweis von Proposition A.2.7 benötigen wir folgendes Korollar aus dem obigen skizzierten Beweis:

Seien X, Y Banachräume, $T: X \rightarrow Y$ ein surjektiver beschränkter Operator. Dann folgt aus $B_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$, dass $B_Y \subseteq T(B_X)$ ist.

Beweis von Proposition A.2.7. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n \in \ell^1$ die Folge, deren n -tes Folgenglied 1 ist und alle anderen Folgenglieder 0 sind. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Familie $(e_n) \subseteq \ell^1$ dicht liegt. Sei $D \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X . Dann ist $D \cap B_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ wieder abzählbar. Durch die Vorgabe $T(e_n) = x_n$ wird ein eindeutig Operator $\tilde{T}: \text{lin}(e_n) \rightarrow X$ definiert. Es gilt

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \\ \text{fast alle } \lambda_n = 0}} \left\| \tilde{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \right) \right\| = \sup_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \\ \text{fast alle } \lambda_n = 0}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \leq \sup_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \\ \text{fast alle } \lambda_n = 0}} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1.$$

Nach einem bekannten Satz aus der Funktionalanalysis (vgl. [Wero7, II.1.5]) lässt sich nun \tilde{T} eindeutig auf ganz $\overline{\text{lin}(e_n)} = \ell^1$ normerhaltend fortsetzen. Sei T diese Fortsetzung. Es ist klar, dass T ein surjektiver beschränkter Operator ist.

Wir zeigen nun, dass T eine Quotientenabbildung ist, d.h. $T(B_{\ell^1}) = B_X$. Wegen $\|T\| \leq 1$ gilt $T(B_{\ell^1}) \subseteq B_X$. Wegen $T(\{e_n\}) = D \cap B_X$ gilt $B_X \subseteq \overline{B_X} = \overline{D \cap B_X} \subseteq \overline{T(B_{\ell^1})}$. Da ℓ^1 vollständig ist, folgt aus Kommentar A.2.8, dass $B_X \subseteq T(B_{\ell^1})$ ist. \square

Kommentar A.2.9. Die Abbildung T die im obigen Beweis konstruiert worden ist, ist nie injektiv. Das kann man durch Widerspruch zeigen: Angenommen $\ker T = 0$. Dann induziert $T: \ell^1 \rightarrow X$ einen isometrischen Isomorphismus. Betrachte eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq D \cap B_X$ mit $x_{n_k} \rightarrow 0$. Dann gilt

$$\|e_{n_k}\|_{\ell^1} = \|Te_{n_k}\|_X = \|x_{n_k}\|_X \rightarrow 0,$$

was einen Widerspruch liefert.

Proposition A.2.10. *Es gibt einen Banachraum X und einen abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq X$, so dass $X \not\cong A \times X/A$ ist.*

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, d.h. für alle Banachräume X und alle abgeschlossene Unterräume $A \subseteq X$ gilt $X \cong A \times X/A$. Wir führen diese Aussage zum Widerspruch. Sei $X = \ell^1$ und sei ℓ^2 der Raum der quadratsummierbaren Folgen. ℓ^2 ist ein separabler Banachraum. Nach Proposition A.2.7 gibt es deswegen eine Quotientenabbildung $T: \ell^1 \rightarrow \ell^2$. Setze $A := \ker T$. Es ist $X/\ker T \cong H$ (isometrisch) isomorph. Es ist nun

$$\ell^1 \cong A \times \ell^2,$$

d.h. ℓ^2 ist isomorph zu einem (abgeschlossenen) Unterraum von ℓ^1 . Nach Proposition A.2.3 muss also ℓ^2 die Schur-Eigenschaft besitzen. In Beispiel A.2.2 haben wir aber gezeigt, dass ℓ^2 nicht die Schur-Eigenschaft besitzen kann. Widerspruch! \square

Im obigen Beweis haben wir gesehen, dass es einen abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq \ell^1$ gibt, so dass $\ell^1 \not\cong A \times \ell^1/A$ ist. Als nächstes möchten wir

$$\mathbb{R} \times \ell^1 \not\cong \mathbb{R} \times A \times \ell^1/A$$

zeigen. Dies werden wir in Abschnitt 1.3 benötigen.

Proposition A.2.11. *Sei X ein Banachraum und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Unterräume mit $\text{codim } A = \text{codim } B = 1$. Dann ist A isomorph zu B .*

Beweis. Nach Proposition 1.1.42 gibt es Vektoren $v, w \in X$ mit

$$X = A \oplus_{\text{top}} \text{lin } v \quad \text{und} \quad X = B \oplus_{\text{top}} \text{lin } w.$$

Nach Lemma 1.1.41 existieren stetige Projektionen $\text{pr}_v: X \rightarrow \text{lin } v$ und $\text{pr}_w: X \rightarrow \text{lin } w$, wobei $\mathbb{1} - \text{pr}_v = \text{pr}_A$ und $\mathbb{1} - \text{pr}_w = \text{pr}_B$ ist.

1. Fall: $\text{pr}_v(w) = 0$ oder $\text{pr}_w(v) = 0$. O.E. sei $\text{pr}_v(w) = 0$. Dann gilt $\text{lin } w \subseteq A$ und da $\dim(A / \text{lin } w) = 1$ ist, gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $A' \subseteq A$ mit

$$A' \oplus_{\text{top}} \text{lin } w = A.$$

Es ist klar, dass

$$A' \oplus_{\text{top}} \text{lin } v \cong A' \oplus_{\text{top}} \text{lin } w = A$$

gilt. Es reicht also zu zeigen, dass

$$A' \oplus \text{lin } v \cong B$$

ist. Betrachte dazu den beschränkten Operator

$$\text{pr}_B|(A' \oplus \text{lin } v): A' \oplus \text{lin } v \rightarrow B.$$

Es ist $\ker \text{pr}_B = \text{lin } w$ und es gilt $A' \cap \text{lin } w = 0 = \text{lin } v \cap \text{lin } w$. Deshalb ist $\text{pr}_B|(A' \oplus \text{lin } v)$ ein bijektiver beschränkter Operator. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (Theorem 1.1.28) folgt, dass es ein toplinearer Isomorphismus sein muss. Das zeigt die Behauptung.

2. Fall: $\text{pr}_v(w) \neq 0$ und $\text{pr}_w(v) \neq 0$. Wir zeigen, dass

$$\text{pr}_A|B: B \rightarrow A$$

bijektiv ist. Mit dem Satz von der offenen Abbildung folgt dann die Isomorphie. Sei $x \in \ker(\text{pr}_A|B) = B \cap \text{lin } v$. Angenommen $x \neq 0$ dann muss $\text{pr}_w(x) \neq 0$ sein, da $x \in \text{lin } v$. Das kann aber nicht sein, da $x \in B$ ist und $\ker(\text{pr}_w) = B$ ist. Also ist $\text{pr}_A|B$ injektiv.

Wir zeigen nun, dass $\text{pr}_A|B$ surjektiv ist. Sei $a \in A$ beliebig. Sei $\lambda_a, \lambda_v \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{pr}_w(a) = \lambda_a w \quad \text{und} \quad \text{pr}_w(v) = \lambda_v w \neq 0.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\text{pr}_w\left(a - \frac{\lambda_a}{\lambda_v} v\right) = 0 \quad \text{also} \quad a - \frac{\lambda_a}{\lambda_v} v \in B.$$

Wegen $\text{lin } v = \ker \text{pr}_A$ rechnet man trivial nach, dass

$$\text{pr}_A\left(a - \frac{\lambda_a}{\lambda_v}v\right) = a$$

gilt. Das zeigt die Behauptung. \square

Korollar A.2.12. Sei X ein Banachraum und $A \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $X \not\cong A \times X/A$. Dann gilt $\mathbb{R} \times X \not\cong \mathbb{R} \times A \times X/A$.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, d.h. es gibt einen Isomorphismus $\Phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R} \times A \times X/A$. Es ist klar, dass $\Phi(0 \times X)$ abgeschlossen ist. Da $\Phi(\mathbb{R} \times 0)$ ein eindimensionaler Vektorraum ist, muss $\text{codim}(\Phi(0 \times X)) = 1$ sein. Nach Proposition A.2.11 gilt dann $\Phi(X) \cong A \times X/A$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

A.3. Erweiterung von Skalarprodukten

Wir zitieren ohne Beweis von [Wero7] einen bekannten Satz, wann eine Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.

Satz A.3.1. Ein Banachraum H ist ein Hilbertraum⁴, wenn die Norm von H die **Parallelogrammgleichung** erfüllt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in H.$$

Das Skalarprodukt ist durch die **Polarisationsformel** gegeben. Falls H ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, lautet sie

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und falls H ein \mathbb{C} -Vektorraum ist, lautet sie

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Der Beweis ist im Wesentlichen cleveres Nachrechnen auf \mathbb{Q} bzw. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ und anschließend ausnutzen, dass diese Unterräume dicht liegen. Wir möchten Satz A.3.1 auf folgendes Problem anwenden:

Lemma A.3.2. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -Hilbertraum H . Dann gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ auf der Komplexifizierung $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, so dass

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_*|_H = \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

wenn wir H mit $H \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subseteq H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ identifizieren.

⁴Dieser Satz gilt auch, wenn man Banachraum durch normierter Raum und Hilbertraum durch Prähilbertraum ersetzt.

Beweis. Wir schreiben \otimes anstatt $\otimes_{\mathbb{R}}$. Sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H . Jedes Element $z \in H \otimes \mathbb{C}$ ist von der Form $z = x \otimes 1 + y \otimes i$. Durch

$$\|x \otimes 1 + y \otimes i\|_* = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

wird eine Norm auf $H \otimes \mathbb{C}$ definiert. Man rechnet leicht nach, dass die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|_*$ gilt. Anschließend rechnet man nach, dass

$$\langle x \otimes 1, y \otimes 1 \rangle_* = \langle x, y \rangle. \quad \square$$

Mit den (Isomorphie) Rechenregeln für das Tensorprodukt gilt:

$$\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} \right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} = \mathbb{C}^n.$$

Damit sieht man leicht, dass $H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [AF05] ADAMS, Robert A. ; FOURNIER, John J. F.: *Sobolev spaces*. 2. ed., Repr. Amsterdam [u.a.] : Academic Press, 2005 (Pure and applied mathematics ; 140). – ISBN 0-12-044143-8
- [Bot88] BOTT, Raoul: Morse theory indomitable. In: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 68 (1988), S. 99–114
- [Dou66] DOUADY, Adrien: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné. In: *Annales de l’institut Fourier* (1966), S. 1–95
- [EE70] EELLS, J. ; ELWORTHY, K. D.: Open Embeddings of Certain Banach Manifolds. In: *The Annals of Mathematics* 91 (1970), Mai, Nr. 3, S. 465–485
- [Eli67] ELIASSON, Halldor I.: Geometry of Manifolds of Maps. In: *J. Differential Geometry* (1967), S. 169–194
- [FK72] FLASCHEL, Peter ; KLINGENBERG, Wilhelm: *Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten, periodische Geodaetische*. Berlin : Springer, 1972 (Lecture notes in mathematics ; 282). http://digitool.hbz-nrw.de:1801/webclient/DeliveryManager?pid=2008516&custom_att_2=simple_viewer; <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz011182210cov.htm>. – ISBN 3-540-05968-7; 0-387-05968-7
- [GHV73] GREUB, Werner ; HALPERIN, Stephen ; VANSTONE, Ray: *Pure and applied mathematics ; 47,2. Bd. 2: Lie groups, principal bundles, and characteristic classes: Connections, curvature, and cohomology*. New York [u.a.] : Acad. Pr., 1973. – ISBN 0-12-302702-0
- [Hen69] HENDERSON, David W.: Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert space. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), S. 759–762
- [Hir76] HIRSCH, Morris W.: *Differential topology*. New York : Springer, 1976 (Graduate texts in mathematics ; 33). http://digitool.hbz-nrw.de:1801/webclient/DeliveryManager?pid=2150107&custom_att_2=simple_viewer. – ISBN 0-387-90148-5 ; 3-540-90148-5

- [HS71] HIRZEBRUCH, Friedrich ; SCHARLAU, Winfried: *Einführung in die Funktionalanalysis*. Mannheim [u.a.] : Bibliogr. Inst., 1971 (BI-Hochschultaschenbücher ; 296a). – ISBN 3-411-00296-4. – Literaturverz. S. 172 - 174
- [JE58] JAMES EELLS, Jr.: On the geometry of function spaces. In: *Symposium Internacional de Topología Algebraica : [en memoria de Witold Hurewicz (1904-1956)]*. Mexico-City : Univ. Nacional Autónoma [u.a.], 1958, S. 303–308
- [Kli76] KLINGENBERG, Wilhelm: *Lectures on closed geodesics*. Bonn : Univ., Math. Institut, 1976. – Maschinenschriftl. Vorlesungsskript
- [KM97] Kapitel 6. In: KRIEGL, Andreas ; MICHOR, Peter W.: *The Convenient Setting of Global Analysis*. American Mathematical Society, 1997
- [Kra13] KRAUSE, Achim: *Stetige Schnitteräume in Rückzugbüdel von nicht homotopen stetige Abbildungen*. 2013. – Private Unterhaltung
- [Kup65] KUPKA, Ivan: Counterexample to the Morse-Sard theorem in the case of infinite-dimensional manifolds. In: *Proceedings of the AMS* 16 (1965), September, S. 954–957
- [Kö04] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis*. Bd. 1: Mit ... 250 Aufgaben samt ausgearbeiteten Lösungen. 6., durchges. Aufl. Berlin : Springer, 2004 <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz106994409cov.htm>; <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz106994409inh.htm>; <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz106994409kap.htm>. – ISBN 3-540-40371-X
- [Lan99] LANG, Serge: *Fundamentals of differential geometry*. New York : Springer, 1999 (Graduate texts in mathematics ; 191). <http://www.gbv.de/dms/ilmenu/toc/246258942.PDF>. – ISBN 0-387-98593-X. – Includes bibliographical references and index
- [LT71] LINDENSTRAUSS, J. ; TZAFRIRI, L.: On the complemented subspaces problem. In: *Israel Journal of Mathematics* 9 (1971), März, Nr. 2, S. 263–269
- [MS04] MACDUFF, Dusa ; SALAMON, Dietmar: *J-holomorphic curves and symplectic topology*. Providence, RI : American Mathematical Society, 2004 (Colloquium publications / American Mathematical Society ; 52). <http://www.gbv.de/dms/goettingen/379868067.pdf>. – ISBN 0-8218-3485-1. – Includes bibliographical references and indexes
- [Sch21] SCHUR, J.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1921), S. 79 – 111
- [Sch93] SCHWARZ, Matthias: *Morse homology*. Basel : Birkhäuser, 1993 (Progress in mathematics ; 111). <http://digitool.hbz-nrw.de:1801/webclient/>

[DeliveryManager?pid=2033808&custom_att_2=simple_viewer.](#) – ISBN 3-7643-2904-1 ; 0-8176-2904-1

- [Sma60] SMALE, Stephen: Morse Inequalities for a dynamical system. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 66 (1960), Nr. 1, S. 43-49
- [Sma65] SMALE, S.: An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem. In: *American Journal of Mathematics* 87 (1965), Oktober, Nr. 4, S. 861-866
- [Wero7] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 6., korr. Aufl. Berlin : Springer, 2007 (Springer-Lehrbuch). <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz26699525xcov.htm>; <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz26699525xkap.htm>; <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz26699525xinh.htm>. – ISBN 978-3-540-72533-6 ; 3-540-72533-4

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.