Einführung in die Programmierung mit MATLAB

Dominik Edelmann

Numerische Analysis, Eberhard Karls Universität Tübingen

October 11, 2022

Ablauf

- Vormittags
  - Theoretische Erklärung im Hybridformat.
  - Live-Programmierung kleiner Programme.
- Nachmittags
  - Programme auf Übungsblatt werden programmiert.
  - Wahlweise zuhause oder unter Betreuung im N16 (oder gar nicht!)

Warum Numerik?

- Viele analytischen Probleme nicht explizit lösbar oder
- explizite Darstellung der Lösung nicht zur schnellen Berechnung geeignet.

Beispiele:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = ? \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Warum Numerik?

Numerische Mathematik (kurz: Numerik):

- Konstruktion von Algorithmen zur näherungsweisen Berechnung (**Approximation**) von Lösungen kontinuierlicher Probleme.
- Analyse der *Genauigkeit* der berechneten Lösung (Fehleranalyse).

Numerik und Programmieren?

- **Algorithmus:** Eindeutige Handlungsvorschrift vor Lösung eines Problems; besteht aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.
- Mathematisch formulierte Algorithmen werden in Programmiersprache übersetzt.
- Algorithmen können zuverlässig und schnell berechnet werden.
- Algorithmen können mit unterschiedlichen Parametern durchgeführt werden.

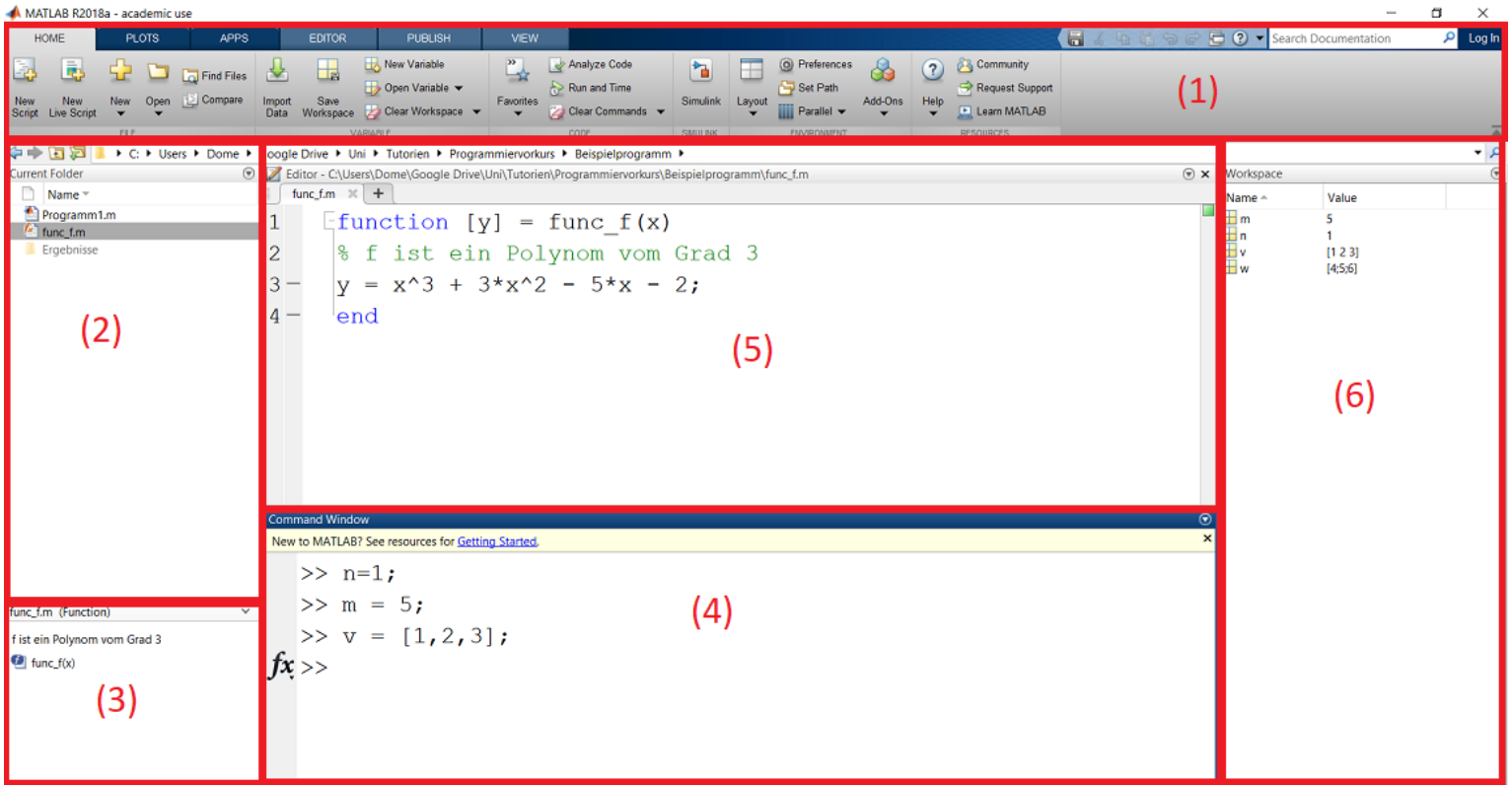
Was bedeutet Programmieren?

- Übersetzen von *umgangssprachlichen* Anweisungen in Computersprache.
- Erstellen von Computerprogrammen.

Matlab ...

- ... ist ein Softwarepaket zur numerischen Lösung mathematischer Probleme.
- ... ist eine Programmiersprache, in der Algorithmen implementiert werden.
- ... bietet massenweise vorgefertigter Algorithmen.

Aufbau von Matlab (Beispiel)



Der Aufbau kann im Menüpunkt **Layout** angepasst werden.

Aufbau von Matlab

- Im **Menü (1)** kann das Layout angepasst werden, Funktionen und Skripte erstellt werden, allgemeine Einstellungen vorgenommen werden (Preferences) und vieles mehr.
- Bei **Current folder (2)** wird der Ordner angezeigt, in dem Matlab gerade arbeitet.
  - Hier können Funktionen und Skripte geöffnet werden ...
  - ... oder auf Unter- und Überordner zugegriffen werden.
- Der Bereich **Details (3)** zeigt Details der in (2) ausgewählten Datei

Aufbau von Matlab

- Im **Command Window (4)** können einzelne Befehle eingegeben und ausgeführt werden (wie in einem *Taschenrechner*).
- Im **Editor (5)** werden Funktionen und Skripte erstellt (dazu später mehr).
- Im Bereich **Workspace (6)** werden die Variablen angezeigt, die aktuell im Arbeitsspeicher gespeichert sind (später).

Einfache Befehle

Aufgabe 1

(a) Öffnen Sie Matlab.

(b) Sorgen Sie dafür, dass das Command Window sichtbar ist.

(c) Geben Sie in das Command Window einige Rechenbefehle ein und drücken Sie auf Enter. Versuchen Sie, für jede Grundrechenart mindestens einen Rechenbefehl auszuführen.

Syntax

- **Syntax:** Regelsystem zur Zusammensetzung elementarer Zeichen.
- Computer kann keine Umgangssprache verstehen.
- Im Gegensatz zu (den meisten) Menschen kann ein Computer keine Sätze verstehen, die im Aufbau falsch sind.
- Syntax legt Regeln über zulässige *Sprachelemente* der Programmiersprache fest.

Syntax

- Damit ein Programmierbefehl durchgeführt werden kann, muss die richtige *Syntax* verwendet werden.
- Beispiel Multiplikation:
  `a = 3`
  `b = 2a` ⇐ Nicht lauffähig! Multiplikationszeichen `*` muss gesetzt werden.
- Beispiel Sinus:
  `x = 3.1415`
  `y = sin x` ⇐ Nicht lauffähig. Klammern müssen gesetzt werden.
  `y = sin(x)` ⇐ Lauffähig.

Syntax

- Führt man eine Folge von Befehlen aus, möchte man oft nur das Endergebnis sehen.
- Jeder Befehl wird dann typischerweise mit einem Semikolon beendet, um die Ausgabe des Ergebnisses im Command Window zu unterdrücken[1].
- Mit dem Prozentzeichen können Sie Kommentare in Ihr Programm einfügen:
  `p = 3.14; % a ist ein Näherungswert für pi`
  ⇒ Alles ab dem Prozentzeichen bis zum Ende der Zeile wird von Matlab bei der Durchführung des Programms ignoriert.

[1] Manchmal ist es aber hilfreich, wenn bestimmte Werte ausgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 2

(a) Öffnen Sie Matlab.

(b) Deklarieren Sie einige Variablen, z. B. `n=3` und `m=5`.

(c) Betrachten Sie den Workspace. Dort sehen Sie die aktuell gespeicherten Variablen und ihren jeweiligen Wert.

(d) Geben Sie die folgenden Befehle ein: `n+m`, `n+m;`, und `k=n+m`. Machen Sie sich die Unterschiede klar, indem Sie darauf achten, welche Werte im Commant Window zurückgegeben werden und welche Werte die Variablen danach im Workspace haben.

Syntax

- Vordefinierte Konstanten, z. B. `pi`, `eps` (Maschinengenauigkeit), `i` (Imaginäre Einheit). Nicht: `e` (man verwendet `exp(1)`).
- Vordefinierte Funktionen, z. B. `sin`, `exp` usw.
- Strings (Zeichenketten) werden mit einfachen Anführungszeichen umschlossen:
  ```
  string = 'Hallo.'
  ```
- Code kann mit dem 3-Punkt-Operator auf mehrere Zeilen verteilt werden (fortgeschritten)
  ```
  summe = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ...
  + 6 + 7 + 8 + 9 + 10;
  ```

Variablen

- Variablen und Operatoren (`+`, `-`, `*`, `/`, `...`) sind die wichtigsten Bausteine beim Programmieren.
- Variablen werden durch Ausdrücke wie `a=3+5`, `v = [1 2 3]` usw. deklariert.
- Das Gleichheitszeichen ist wie ein $:=$ in mathematischen Texten zu verstehen: Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen wird berechnet (falls möglich), und dann als Variable gespeichert, deren Namen links vom Gleichheitszeichen steht.
  $\Rightarrow$ `n = n+1` erhöht den Wert der Variable `n` um 1.

Regeln für Variablennamen

- Variablennamen dürfen aus Klein- und Großbuchstaben, Zahlen und Unterstrichen gebildet werden.
- Variablennamen dürfen nur mit Buchstaben beginnen.
- Matlab unterscheidet zwischen Groß- und Kleinschreibung!
- Es gehört zu einem guten Programmierstil, weitgehend selbsterklärende, intuitive und möglichst kurze Variablennamen zu verwenden.
- Halten Sie sich möglichst auch an Konventionen, die Sie sonst aus der Mathematik kennen: z. B. $n, m, \ldots$ für natürliche Zahlen, v, w für Vektoren und A für Matrizen etc.

Skripte

- Einfache Matlab-Programme bestehen aus Skripten und Funktionen.
- In einem Skript wird eine Reihe von Befehlen gebündelt.
- Führt man das Skript aus, werden die dort eingegebenen Befehle der Reihe nach ausgeführt.

$\Longrightarrow$ Der Aufruf eines Skripts ist äquivalent dazu, die dort enthaltenen Befehle nacheinander in das Command Window einzugeben.

Skripte

Aufgabe 3

(a) Sorgen Sie dafür, dass *Current Folder* sichtbar ist.

(b) Erstellen Sie per Rechtsklick ein neues Skript (Rechtsklick → New File → New Script) mit dem Namen `meinErstesSkript.m`

(c) Öffnen Sie dieses Skript per Doppelklick. Die leere Datei erscheint im Editor.

(d) Deklarieren Sie drei Variablen `a`, `b` und `c` mit von Ihnen gewählten Werten.

(e) Geben Sie in die nächsten Zeilen `sum=a+b+c` und `prod=a*b*c` ein.

(f) Führen Sie das Skript aus.

(g) Ändern Sie die Werte von `a`, `b` und `c` und führen Sie das Skript erneut aus.

Aufgaben

Aufgabe 4

1. Geben Sie in das Command Window `meinErstesSkript` ein. Was passiert?
2. Geben Sie, nachdem Sie das Skript aus der vorigen Aufgabe aufgerufen haben, den Befehl `clear all` ein. Was passiert mit den im Workspace gespeicherten Variablen?
3. Geben Sie den Befehl `clc` ein. Was passiert?

$\Rightarrow$ In den meisten Fällen ist es sinnvoll, diese beiden Befehle an den Anfang eines Skripts zu stellen.

Relationale Operatoren

- Neben dem Zuweisungsoperator = und den arithmetischen Operatoren `+ - * / ^` gibt es weitere Operatoren.
- Die relationalen Operatoren sind `== ~= > >= < <=`.

```
n = (3 ~= 4);
disp(n); % Ausgabe:  true
```

- Diese werden in der Regel verwendet, um bestimmte Bedingungen abzufragen.
- Auch hier gilt: Die Operation rechts von =, also hier die Abfrage, ob $3 \neq 4$ gilt, wird zuerst durchgeführt. Das Ergebnis `true` wird in *n* gespeichert.

Logische Operatoren

- Neben den relationalen Operatoren gibt es auch logische Operatoren: `&&` `||` `~` stehen für and, or bzw. not.
- Mit logischen Operatoren werden logische Variablen (also `true` und `false`) verknüft. Bei `||` handelt es sich um ein sog. *einschließendes Oder*.
  Beispiel:

```
x = 5;
y = (x < 6) || (x > 4);
disp(y); % Ausgabe true
z = (x > 0) && ~(x > 3);
disp(z); % Ausgabe false
```

if-Abfragen

- In sehr vielen Programmen gibt es einzelne Schritte, die nur unter bestimmten Bedingungen durchgeführt werden.
- Dafür werden if-Abfragen gepaart mit logischen Ausdrücken verwendet. Die Struktur ist dabei immer Folgende:

if *logischer Ausdruck*
  Anweisung(en)
elseif *logischer Ausdruck*
  Anweisung(en)
⋮
else
Anweisung(en)
end

if-Abfragen

- Das letzte else darf keinen logischen Ausdruck haben.
- Die Zeilen mit `if`, `elseif`, `else` und `end` werden **nicht** mit einem Semikolon beendet!
- `elseif` und `else` sind nicht erforderlich:

```
if x ~= 0
  y = 1/x;
end
```

  $\Rightarrow$ Da keine Alternative mit `else` angegeben wurde, werden diese Zeilen einfach übersprungen, falls $x = 0$ ist.
- if-else-Strukturen können beliebig ineinander geschachtelt werden. Matlab rückt die Anweisungen zwischen `if` und `else` um vier Leerzeichen ein. Behalten Sie diese Einrückung bei! Dadurch wird der Code übersichtlicher.

if-Abfragen

Aufgabe 5

Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie zwei Zahlen `x` und `y` deklarieren. Dann soll das Programm $z = \frac{x}{y}$ ausrechnen, falls $y \neq 0$ ist und eine Fehlermeldung, falls $y = 0$.

Aufgabe 6

Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie zwei Zahlen `x` und `y` deklarieren. Das Programm soll ausgeben, ob $x > y$, $x = y$ oder $x < y$ ist.

Schleifen

- Zur wiederholten, *iterativen* Durchführung bestimmter Operationen beispielsweise bei
  - Partialsummen
  - Integration mit Riemann-Summen
  - Gauß-Elimination
- Schleifen sind gemeinsam mit `if`-Abfragen die wichtigsten Kontrollstrukturen beim Programmieren.

for-Schleifen

- for-Schleifen haben die Struktur
  for *Variable* = *Startwert:Endwert*
  Anweisung(en)
  end
- Beispiel: Berechnung von $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ für gegebenes n, z. B. $n = 5$:

```
1:  n = 5;
2:  S = 0; % Variable für die Summe
3:  for k=0:n
4:    S = S + (-1)^k / (2*k+1);
5:  end
```

Erläuterungen

- In Zeile 1 wird zunächst der Index n, bis zu der die Partialsumme berechnet werden soll, deklariert.
- In Zeile 2 wird eine Variable `S` deklariert, die am Ende den Wert der Summe enthalten soll. Dies ist notwendig, da die einzelnen Summanden in Zeile 4 zu einer bereits bestehenden Variable addiert werden müssen.
  (Bei Produkten würde man mit dem Wert 1 initialisieren.)

for-Schleifen

Erläuterung:

- In Zeile 3 wird zunächst eine Variable `k=0` definiert.
- Alle Anweisungen die zwischen dieser Zeile und `end` auftreten werden nacheinander ausgeführt, wobei die Variable k den Wert 0 hat.
- Dann wird k um 1 erhöht, hat also nun den Wert 1.
- Alle Anweisungen werden nacheinander ausgeführt, diesmal mit `k=1`
- Dann wird k um 1 erhöht und die Anweisungen erneut durchgeführt
- ...so lange bis `k=5` ist, wobei alle Anweisungen dann ein letztes Mal durchgeführt werden.

for-Schleifen

Aufgabe 7

(a) Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie zwei ganze Zahlen `n` und `N` definieren. Das Programm soll nun alle ganzen Zahlen von `n` bis einschließlich `N` ausgeben.
(b) Was passiert, wenn Sie `n` größer als `N` wählen?
(c) Verbessern Sie ihr Programm, so dass es eine Fehlermeldung ausgibt und die Schleife nicht aufgerufen wird, wenn `n` $>$ `N` ist.

Aufgabe 8

Schreiben Sie ein Skript, das für eine gegebene Zahl n die Fakultät $n!$ berechnet.

for-Schleifen

- Manchmal möchte man nicht, dass die Schleifenvariable in jedem Schritt um 1 erhöht wird.
- Beispiel: Berechnung von $7! = 7 \cdot 6 \cdots 2 \cdot 1$

```
n = 7;
x = n;
for i=(n-1):-1:1
  x = x*i;
end
```

- Erklärung: `i` hat anfangs den Wert `n-1 = 6` und wird in jedem Schleifendurchlauf um `-1` erhöht, solange, bis die Schleife mit `i = 1` das letzte Mal durchgeführt wird.

while-Schleifen

- Manchmal ist nicht von Vornherein klar, wie oft die Anweisungen in einer Schleife wiederholt werden müssen.
- Beispiel: Man kann zeigen, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right), \quad x_1 = 2$$

  gegen $\sqrt{2}$ konvergiert (Heron-Verfahren).
- Möchte man dieses Verfahren realisieren, berechnet man nacheinander diese Folge, bis sich zwei aufeinander folgende Folgenglieder nicht mehr *stark unterscheiden*, also z. B. solange, bis $|x_{k+1} - x_k| < \texttt{tol}$ mit einer vorgegebenen *Toleranz* `tol`.
  $\Longrightarrow$ Es ist nicht klar, wie viele Iterationen erforderlich sind.

while-Schleifen

- Eine while-Schleife hat die Struktur
  while *logischer Ausdruck*
  Anweisung(en)
  end
- Vor jedem Schleifendurchlauf wird gecheckt, ob *logischer Ausdruck* den Wert `true` liefert. Falls ja, werden die Anweisungen zwischen `while` und `end` durchgeführt und *logischer Ausdruck* wird erneut gecheckt.
- Achtung: Es ist möglich, dass *logischer Ausdruck* immer `true` liefert. In diesem Fall bricht die Schleife nicht ab. Man spricht auch von einer **Endlosschleife**[2].

[2] Das ist bei einer for-Schleife auch möglich, dann hat man aber i. d. R. einen Programmierfehler gemacht.

Aufgabe 9

Schreiben Sie ein Programm, welches die rekursive Folge $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{2}{x_k})$ mit Startwert $x_1 = 2$ solange berechnet, bis die Differenz zweier aufeinander folgender Werte kleiner als eine vorgegebene Toleranz `tol` ist.
Dazu soll in einer While-Schleife jeweils ein `xNeu` aus `xAlt` gemäß der obigen Rechenvorschrift berechnet werden.

break und continue in Schleifen

- `continue`: Der aktuelle Schleifendurchlauf wird unterbrochen und es wird an den Schleifenanfang gesprungen.
- `break`: Die komplette Schleife wird unterbrochen und die Abarbeitung wird nach der Schleife fortgesetzt.

```
for i=1:6
  if i == 2
    continue
  end
  if i == 4
    break
  end
  disp(i)
end
```

Welche Zahlen gibt das Programm aus?

Skripte - Zusammenfassung

- Ein Skript *bündelt* eine Reihe von Befehlen, ohne diese zunächst auszuführen.
- Ein Skript auszuführen ist gleichbedeutend damit, die darin implementierten Befehle nacheinander im Command Window einzugeben. Das bedeutet insbesondere:
  - Ein Skript kennt alle Variablen, die bereits vorher deklariert wurden (und sich im Workspace befinden).
  - Werden bereits vorhandene Variablen geändert oder neue deklariert, so sind diese Änderungen nach der Ausführung des Skripts vorhanden.

Funktionen

- Im Gegensatz zu Skripten haben Funktionen ihren *eigenen Workspace*. Das bedeutet:
  - Wird eine Funktion aufgerufen, so kennt diese die bereits im Workspace vorhandenen Variablen nicht und kann diese somit auch nicht ändern.
  - Werden in einer Funktion neue Variablen definiert, so sind diese nach Auswertung der Funktion nicht im Workspace vorhanden.
- Funktionen erhalten typischerweise Input-Parameter (*Variablen*) und liefern als Ergebnis Output-Parameter (*Funktionswerte*)

Beispielfunktion

Die folgende Funktion berechnet die Fläche und den Umfang eines Rechtecks:

```
function [ar, per] = area(a,b)
%Berechne Fläche und Umfang eines Rechtecks mit
Seitenlängen a,b.
ar = a*b;
per = 2*a+2*b;
end
```

Dabei sind `a` und `b` die Input-Parameter und `ar` und `per` die Output-Parameter.

Wichtiges über Funktionen

- Wichtig: Bei einer Funktion müssen Datei- und Funktionsnamen übereinstimmen. Die obige Funktion muss also in einer Datei `area.m` gespeichert werden.
- Obige Funktion erwartet beim Aufruf zwei Input-Parameter.
- Die Rückgabewerte müssen nicht speziell gesetzt werden (s. folgende Aufgabe).
- Benötigt eine Funktion keine Eingabewerte, so ist die runde Klammer hinter dem Funktionsnamen leer: `()`.
- Liefert eine Funktion keine Rückgabewerte, so bleibt die eckige Klammer hinter `function` leer: `[]`.

Aufgaben

Aufgabe 10

Schreiben Sie eine Funktion `function [ar,per] = area(r)`, welche die Fläche (= area) und den Umfang (= perimeter) eines Kreises mit Radius r zurückgibt.
Rufen Sie dann die Funktion (im Command Window) auf unterschiedliche Weisen auf (ohne Semikolon `;` am Ende).
Betrachten Sie nach jedem Aufruf den Workspace.

- `area(r)`
- `[ar,per] = area(r)`
- `x = area(r)`

Welchen Wert bekommt `x`? Machen Sie sich die unterschiedlichen Bedeutungen der Aufrufe klar.

Wichtige Funktionen in Matlab

- Trigonometrische Funktionen `sin, cos, tan`
- Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus `exp, log`
- Wurzelfunktion `sqrt`
- Absolutbetrag `abs`
- Verwaltungsfunktionen `length, size`
- Laden, Speichern `load, save` (wird nicht besprochen)
- Grafische Funktionen `plot` (später)
- *Mächtigere* Funktionen `lu, qr, norm` ...(wird nicht besprochen)

Vektoren und Matrizen

- Matlab basiert auf Matrizen. (Matlab steht für **Mat**rix **Lab**oratory)
- Skalare (Zahlen) sind (1×1)-Matrizen.
- Spalten- bzw. Zeilenvektoren sind $(n \times 1)$- bzw. $(1 \times n)$-Matrizen.

Vektoren: Erzeugung

- Vektoren werden in eckigen Klammern `[ ]` deklariert.
- Spalten werden durch Kommas getrennt, Zeilen durch Semikolons.
- `a = [1, 2, 3, 4];` erzeugt einen Zeilenvektor der Dimension 4.
- `b = [1 2 3 4];` ist identisch zu `a`.
- `c = [1;2;3];` erzeugt einen Spaltenvektor der Dimension 3.
- `d = 1:0.5:3;` erzeugt den Vektor `[1 1.5 2 2.5 3]`.
- `e = [];` erzeugt einen *leeren Vektor*.

Vektoren: Zugriff

- `a = [1 2 5 9 3 7];` erzeugt Zeilenvektor der Dimension 6.
- Elementweiser Zugriff:
  `g = a(1);` erzeugt Skalar mit dem Wert $a_1 = 1$.
  `i = 3; g = a(i);` erzeugt Skalar mit dem Wert $a_i = a_3 = 5$.
  `g = a(end);` erzeugt Skalar mit dem letzten Wert von a, d. h. $g = 7$.
- Bereichswahl:
  `g = a(1:3);` enthält die ersten drei Werte von a.
  `v = [1 2 4]; g = a(v);` $\Rightarrow$ Was ist g?
- Im Unterschied zu anderen Programmiersprachen beginnt in Matlab die Nummerierung mit 1, nicht mit 0.

Vektoren: Operationen

Wichtig: Indizes können nur positive natürliche Zahlen sein!

- Transponieren: Ist `c` ein Spaltenvektor, so ist `d = c'` ein Zeilenvektor und vice versa.
- Länge eines Vektors ermitteln, z. B. für Schleifen:

```
n = length(a);
for i = 1:n
  disp(a(i));
end
```

Vektoren

Aufgabe 11

Schreiben Sie eine Funktion `function [c] = add(a,b)`, welche zwei Vektoren `a` und `b` addiert. Die Addition soll mittels einer for-Schleife elementweise realisiert werden. Dazu soll vorher die Länge der Vektoren `a` und `b` ermittelt werden.

Vektoren: Operationen

Operatoren wirken auf Vektoren möglicherweise anders als auf Skalare.

- Zuweisungsoperator: `=`
  `a = b`: $a(i) = b(i)$ für alle i.
- Arithmetische Operatoren: `+ -`
  `a + b`: $a(i) + b(i)$ für alle i.

Vorsicht!

Matlab addiert unter Umständen auch Vektoren und Skalare sowie Vektoren unterschiedlicher Dimensionen. Dies kann zu unerwarteten Ergebnissen führen. Achten Sie daher immer darauf, ob Sie Zeilen- oder Spaltenvektoren verwenden.

- Arithmetische Operatoren: `*`
  `a * b` funktioniert nur dann, wenn `a` ein Zeilen- und `b` ein Spaltenvektor ist (Skalarprodukt) oder umgekehrt (dyadisches Produkt).
  $\Rightarrow$ entspricht Matrix-Multiplikation.

Vektoren: Operationen

- Relationale Operatoren werden elementweise ausgeführt: `a == b` liefert nicht `true` oder `false`, sondern einen Vektor, dessen Einträge `true` oder `false` sind:

```
a = [1 2 3 4];
b = [1 9 3 4];
c = (a == b); % c = [1 0 1 1]
```

- Entsprechendes gilt für >, >=, usw.
- if-Abfragen werden nur dann durchgeführt, wenn alle Werte `true` sind:

```
if a == b disp(a); end
```

liefert keine Ausgabe.

Matrizen: Erzeugung spezieller Matrizen

- `A = [1 2 3 4; 5 6 7 8]; % 2 x 4 - Matrix`

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- `B = [1 5; 2 6; 3 7; 4 8]'; % identisch zu A`
- `B(2,3) = 15; % ändert Element von B`

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrizen: Erzeugung

- `I = eye(n); % n x n - Einheitsmatrix`
- `A = zeros(n,m); % n x m - Matrix mit Nullen`
- `B = ones(n,m); % n x m - Matrix mit Einsen`
- `v = [1 2 3]; D = diag(v);` erzeugt die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- `M = diag(v,1);` erzeugt die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen: Zugriff

- Als Ganzes: `B = A;`.
- Elementweise:
  `b = A(3,1);`
  `i = 2; j = 3; g = A(i,j);`
  `g = A(end,1);` g ist Skalar und enthält das erste Element aus der letzten Zeile von `A`.
- Bereichswahl:
  `B = A(2:4,2:4);` ist (3×3)-Untermatrix

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Für Vektoren v, w mit positiven ganzen Zahlen liefert $A(v, w)$ die Matrix mit den Einträgen a_{v_i, w_j} (fortgeschritten).

Matrizen: Operationen

- Transponieren:
  ```
  B = A'; % B ist Transponierte von A
  ```
- Größe ermitteln:
  ```
  [n m] = size(A); % n Zeilen, m Spalten
  ```
  (gemäß der Notation $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$)

Aufgabe 12

Schreiben Sie eine Funktion `function [C] = addMat(A,B)`, welche zwei Matrizen A und B addiert. Dazu soll zunächst die Größe von A und B ermittelt werden und die Addition soll in zwei ineinander geschachtelten for-Schleifen realisiert werden.

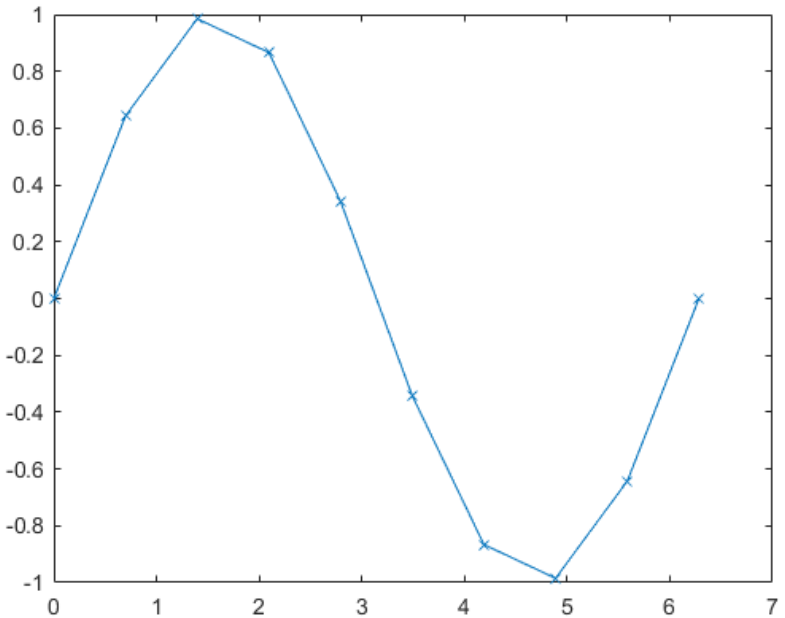
Matrizen: Rechenoperationen

- `A` $\pm$ `B` berechnet die Matrix mit den Einträgen `A(i,j)` $\pm$ `B(i,j)`.
- `A * B` hat drei Bedeutungen:
  1. Sind `A` und `B` Matrizen, so entspricht `A*B` der üblichen Matrixmultiplikation (sofern die Dimensionen passen).
  2. Ist `A` eine $(m \times n)$-Matrix und `B` ein $(n \times 1)$-Spaltenvektor, dann ist `A*B` eine Matrix–Vektor–Multiplikation (fällt eigentlich unter (1)).
  3. Ist `A` eine Matrix und `B` ein Skalar, dann ist `A * B` die Matrix mit den Einträgen `A(i,j)*B`.

2d Plots

- Matlab plottet nicht direkt Funktionen, sondern interpoliert Punktmengen $(x(i), y(i))_{i=1}^{N}$.

```
x = linspace(0,2*pi,10); y = sin(x);
plot(x,y); % Plotte Vektoren der Dimension 10
```



Vorgehen beim Plotten

Gegeben sei eine zu plottende Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Vorgehensweise:

1. Erstelle Vektor `x` mit *Stützstellen* (Auswertungspunkte). Bsp:
   ```
   x = -1:0.1:1;
   % Intervall [-1,1], Abstand 0.1 zwischen zwei Punkten
   x2 = linspace(-1,1,21); % entspricht x
   ```
2. Werte die Funktion in allen Stützstellen aus, beispielsweise mit einer Schleife.
   ```
   for i=1:length(x) y(i)=f(x(i)); end
   ```
3. Die Punktmenge wird an Matlab zum Plotten übergeben
   ```
   plot(x,y,'Marker','x')
   ```
4. Nach Wunsch können an dem Plot noch verschiedene Einstellungen vorgenommen werden.

Plotten: Beispiel

```
1  % Plotte sin(x) fuer x in [0,2pi]
2
3  % Wertetabelle erstellen
4
5  % Vektor mit 50 aequidistanten Stuetzstellen erzeugen
6  x = linspace(0,2*pi,50);
7  y = zeros(50,1); % Initialisierung
8
9  % Berechne sin(x(i)) fuer alle x(i)
10 for i=1:length(x)
11 y(i) = sin(x(i));
12 end
13
14 % Plotten mit roter Farbe
15 % Die Punkte (x(i),y(i)) werden mit einem Kreis
markiert
16 plot(x,y,'r','Marker','o');
```

Plotten: Beispiel

```
18 % Ueberschrift und Achsenbeschriftungen!  Matlab
kann auch LaTeX
19 title('Mein erster plot');
20 xlabel('0 \leq x \leq 2 \pi');
21 ylabel('sin(x)');
22
23 % Lege Achsen fest:  [xmin,xmax,ymin,ymax]
24 axis([0,2*pi,-1.1,1.1]);
25
26 % Speichere Plot als png-Datei
27 % Erstes Argument:  Dateiformat
28 % Zweites Argument:  Aufloesung
29 % Letztes Argument:  Dateiname
30 print('-dpng','-r100','sin_plot.png');
```

Mehrere Plots in einem Schaubild

- Eine Möglichkeit:

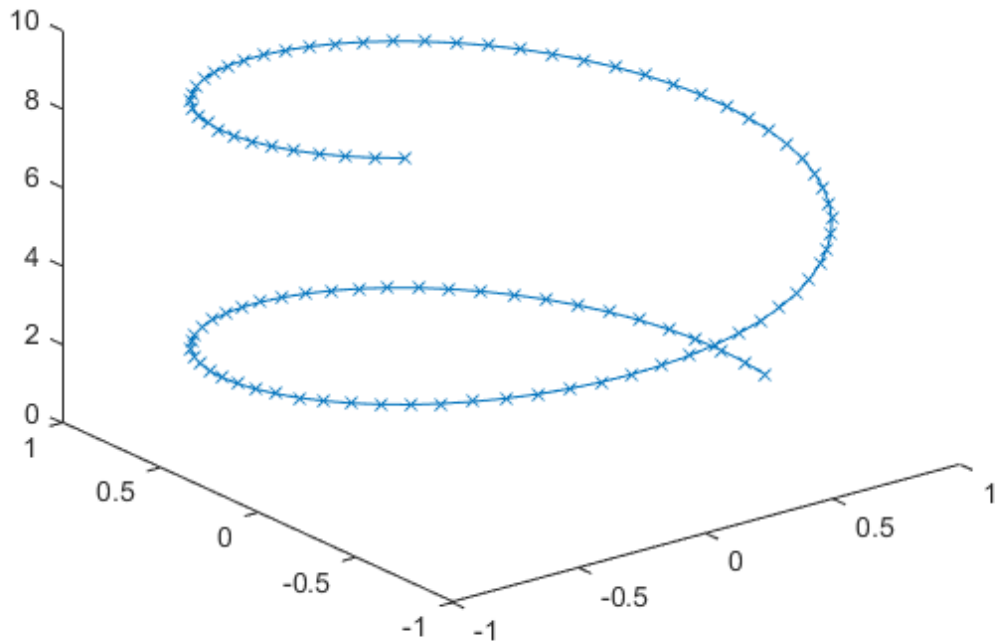
```
% x1, y1 Vektoren der Dimension n
% x2, y2 Vektoren der Dimension m
plot(x1,y1);
hold on; % Garantiert, dass nochmal in dieselbe
Figur geplottet wird.
plot(x2,y2);
legend('Erste Linie','Zweite Linie');
```

- Andere Möglichkeit: `plot(x1,x2,y1,y2)`

3D-Plot einer Kurve

- 3D-Plot einer Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^3$

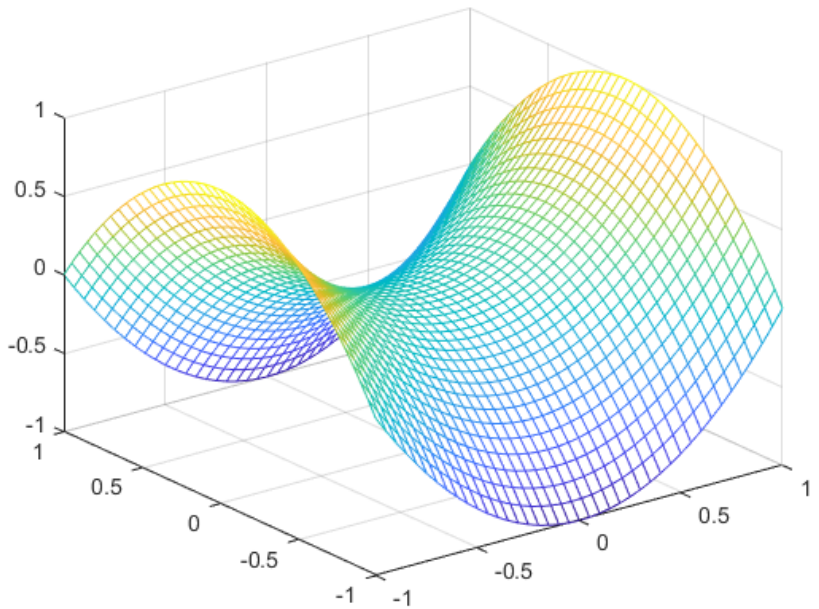
```
plot3(x,y,z);
% x, y, z Vektoren der Dimension n
```



3D-Plot eines Graphen

- 3D-Plot einer Funktion $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$
- Geplottet wird die Punktmenge $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$

```
1:  a = -1:0.05:1; % Diskretisierung von [a1,b1]
2:  b = -1:0.05:1; % Diskretisierung von [a2,b2]
3:  [x,y] = meshgrid(a,b) % Generiere Gitterpunkte
4:  z = x.^2 - y.^2;
5:  mesh(x,y,z);
```



Aufbau eines (kleinen) Programms

- Wir haben gelernt, wie man mit Skripten und Funktionen umgeht.
- Ein Programm besteht typischerweise aus einem Skript und mehreren Funktionen und lässt sich in drei Blöcke gliedern:
  1. **Preprocessing:** Hier werden Parameter eingegeben und Einstellungen vorgenommen. Dieser Block gehört in das Skript.
  2. **Processing:** Code, in dem der Algorithmus durchgeführt wird. Dazu werden im Skript typischerweise eine oder mehrere Funktionen aufgerufen, die auch miteinander interagieren können.
  3. **Postprocessing:** Ausgabe, Speicherung, Visualisierung von Ergebnissen.

Aufbau eines (kleinen) Programms

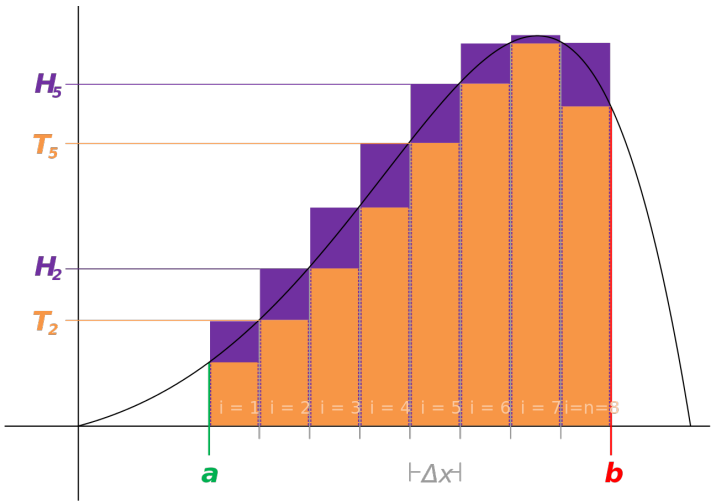
- Es ist eine Frage des Stils, wie viele und wie große Funktionen verwendet werden.
  Faustregel: Eine Funktion sollte auf einen (kleinen) Bildschirm passen.
- In einem fertigen Programm sollte der Benutzer nur noch die Input–Parameter im Skript eingeben und dieses ausführen. Das Processing und Postprocessing sollten dann vollständig automatisch ablaufen.

Einschub: Function Handles

- Man kann mithilfe eines Codes wie
  ```
  f = @(x)(x^2+1)
  ```
  eine Funktion (genauer: ein *function handle* definieren, wobei in der letzten Klammer der Funktionsausdruck steht).
- Diese Funktion kann, nachdem sie definiert wurde, genauso aufgerufen werden, wie die Funktionen, die als Dateien gespeichert wurden.
- Nachdem der Workspace gelöscht oder Matlab beendet wurde ist ein function handle nicht mehr verfügbar.
- Vorteil: Function handles können wie Variablen an andere Funktionen übergeben und dort verwendet werden, sofern die Syntax dort für eine Funktion ausgelegt ist.

Numerische Integration

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer Funktion ist per Definition der Grenzwert von Riemann-Summen.
Man kann also ein Integral näherungsweise berechnen, indem man Riemann-Summen berechnet.



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsches_Integral

Numerische Integration

Vorgehensweise:

- Zerlege das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle mit den Grenzen

$$a < a + h < a + 2h < \ldots < a + Nh = b\,,$$

  d. h. $h = \frac{b-a}{N}$.

- Es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx\,.$$

Numerische Integration

Die Idee ist nun, dass auf einem *kleinen* Intervall $[c, c+h]$

$$\int_c^{c+h} f(x)dx \approx hf(c)\,.$$

Daraus ergibt sich die (linke) **Rechtecksregel**

$$I := \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} hf(a+kh) =: I(h)\,.$$

Der von h abhängige Wert $I(h)$ ist eine *Approximation* an den exakten Wert I des Integrals.

Numerische Integration

Numerische Aspekte:

- Konvergiert der approximierte Wert für $h \to 0$ auch wirklich gegen den exakten Wert, also gilt $\lim_{h \to 0} I(h) = I$?
- Konvergiert der approximierte Wert für jede beliebige (integrierbare) Funktion?
- Falls ja, wie *schnell* konvergiert $I(h)$ gegen I, d. h. lässt sich etwas über $|I(h) - I|$ aussagen[3]?

[3] Spoiler: Es gibt eine Konstante c, so dass $|I(h) - I| \leq ch$ für jede stetig differenzierbare Funktion.

Numerische Integration: Planung des Programms

- Was sind die Inputparameter? Die Funktion f, die Intervallgrenzen a, b und die Anzahl N der Teilintervalle. $\Rightarrow$ Preprocessing.
- Was muss der Algorithmus berechnen? Funktionsauswertungen $f(a + kh)$ für $k = 0, \ldots, N - 1$ und die Summe $\sum hf(a + kh)$. $\Rightarrow$ Processing.
- Welche Ergebnisse soll der Algorithmus liefern und wie sollen sie visualisiert werden? Hier nur das approximierte Ergebnis $I(h)$. $\Rightarrow$ Postprocessing.

Numerische Integration: Pseudocode

1. Input: f, a, b, N.
2. Berechne die Funktionswerte $f_k = f(a + kh)$ für $k = 0, \ldots, N-1$.
3. Berechne die Produkte hf_k.
4. Bilde die Summe $I(h) = \sum_{k=0}^{N-1} hf_k$.
5. Gebe das Ergebnis $I(h)$ aus.

Logarithmische Fehlerplots

- Die numerischen Ergebnisse hängen oft von der gewählten *Schrittweite* h ab.
- Beispiele: Breite h der Rechtecke bei der Integration; Differenzenquotient, Schrittweite bei Differentialgleichungen ...
- Man möchte wissen, ob der Näherungswert gegen den exakten Wert konvergiert.
- Bei Integralen also: Konvergiert $I(h) \to I$ für $h \to 0$ bzw. $|I(h) - I| \to 0$?

Logarithmische Fehlerplots

- Ist $I(h)$ der von h anhängige Näherungswert, so kann man oft zeigen, dass $|I(h) - I| \leq ch^k$ mit einer natürlichen Zahl k (bei der Rechtecksregel ist $k = 1$).
- k wird *Konvergenzordnung* genannt. Je größer k, desto *schneller* konvergiert die Methode.
- Wegen

$$\log(ch^k) = \log c + k \log h$$

ist die Funktion $h \mapsto ch^k$ nach Logarithmieren eine Gerade mit Steigung k.

- Mit einem (doppelt) Logarithmischen Schaubild kann man die Ordnung des Verfahrens an der Steigung der "Gerade" $h \mapsto |I(h) - I|$ ablesen.

- Mit `loglog` kann man ein logarithmisches Schaubild erstellen.
- `loglog` funktioniert genau wie `plot` mit x- und y-Werten.
- Die x- und y-Achse sind dann nicht linear, sondern logarithmisch skaliert.
- Damit kann man sich davon überzeugen, dass das Verfahren die richtige Ordnung hat.

Fehlersuche

- Hat man einen Code fertiggestellt, wird dieser in den meisten Fällen nicht auf Anhieb funktionieren.
- Es ist normal, einen großen Teil der Zeit mit der Fehlersuche (Debugging) zu verbringen.
- Es gibt verschiedene Arten von Fehlern:
  - Syntax-Fehler, z. B. `A = * A`: Leicht zu beheben, da Matlab euch sagt, was falsch ist.
  - Logische Fehler: Schwer zu finden, da das Programm aus Sicht des Computers fehlerfrei ist, aber nicht das richtige Ergebnis liefert.

Typische Fehlerquellen

- Falsche Syntax, z. B. `y = 2x+1;`
- Unvollständiges Programm, z. B. wenn man sich nicht genug Gedanken über negative Zahlen, falsche Dimensionen, Zeilen- und Spaltenvektoren etc. macht.
- Unerwartete Argumente für Funktionen, z. B. wenn man einer Funktion, die Skalare erwartet, Vektoren übergibt.
- Unerwarteter Zustand von Daten, z. B. eine Variable, die später noch gebraucht wird, wird aus Versehen überschrieben.
- Logische Fehler, z. B. falsche Bedingungen in if-Abfragen.

Fehlersuche

Ein paar Tipps:

- Bleiben Sie ruhig: Fehler beim Programmieren sind absolut normal.
- Systematik: Gehen Sie systematisch vor!
- Fehlermeldungen: Lesen Sie die Fehlermeldungen! Zumindest die Zeilenangaben sind verständlich. Viele Fehler lassen sich dadurch leicht beheben.
- Fehlereinschätzung: Ist es eher ein einfacher Syntax-Fehler?
- Fehlereingrenzung: Isolieren Sie den Fehler:
  - Kommentieren Sie Teile des Codes aus, die nicht unbedingt nötig sind. Taucht der Fehler immernoch auf?
  - Hat der Code früher bereits funktioniert? Was genau haben Sie verändert?
- Fragen Sie andere! Das ist meistens die schnellste Methode.

Performance

- Performance ist das *Zeitverhalten* eines Programms.
- Je schneller ein Programm läuft und je weniger Speicher es benötigt, desto besser.
- Hier: Performance ist wichtig, wenn es in der Programmieraufgabe ausdrücklich verlangt ist.
- Performance kann z. B. mit `tic` und `toc` gemessen werden (zurückgegeben wird die Zeit, die zwischen `tic` und `toc` vergangen ist), oder mit dem Matlab-Profiler (fortgeschritten, wird nicht besprochen).

Performance und Effizienz

- Es gibt keine einheitliche Definition, wann ein Programm *effizient* genannt wird.
- Häufig hängt die Laufzeit bzw. die Anzahl der nötigen Rechenoperationen von einer Größe N ab:
  - (Quadratische) Gleichungssysteme mit $(N \times N)$-Matrizen,
  - Numerische Integration mit N Teilintervallen,
  - Berechnung der ersten N Folgenglieder einer (rekursiven) Folge.
- Das Ziel ist, dass die von N abhängige Laufzeit des Programms nicht zu schnell mit N wächst.

Performance und Effizienz

- Manchmal nennt man einen Algorithmus *effizient*, falls er eine polynomiale Laufzeit hat, also falls die Laufzeit in etwa proportional zu cN^k mit einer Konstante c und einem Exponenten k.
- Beispiel (später in Numerik): Aufwand zur Berechnung LR-Zerlegung (= Gauß-Elimination) einer $(N \times N)$-Matrix $\approx \frac{1}{3}N^3$.
- Obige Definition unbrauchbar, falls k groß, sie schließt aber Algorithmen, deren Laufzeit exponentiell wächst, aus.

Beispiel: Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Zahlenfolge ist definiert durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \quad f_1 = f_2 = 1\,.$$

Man kann leicht eine *rekursive Funktion* schreiben:

```
1 function [fn] = fib_recursive(n)
2 % Berechnet das n-te Element der Fibonacci-Folge
rekursiv
3 if n <= 2
4 fn = 1;
5 else
6 fn = fib_recursive(n-1)+fib_recursive(n-2);
7 end
```

Beispiel: Fibonacci-Folge

- Ruft man obige Funktion mit $n = 3$ auf, so wird der if-Block übersprungen und es wird Zeile 6 ausgeführt.
- Die Funktion ruft sich selbst zweimal auf mit $n = 2$ und $n = 1$.
- In diesen Aufrufen wird `fn = 1` zurückgegeben.
- Im ursprünglichen Funktionsaufruf wird dann mit den zurückgegebenen Werten `fn = 1+1` berechnet.

Beispiel: Fibonacci-Folge

Obiges Programm benötigt bereits ca. eine Minute, um f_{45} auszurechnen. Denken Sie, dass die Fibonacci-Folge kompliziert genug ist, um das zu rechtfertigen?
Woran könnte es liegen, dass dieses Programm so langsam ist?
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie oft obige Funktion mit einem $n \in 1, 2$ aufgerufen wird, wenn sie f_4, f_5, f_6 etc. berechnen wollen!
$\Rightarrow$ Mehr dazu im Präsenzteil!

Beispiel: Fibonacci-Folge

Erklärung: Nur für $n = 1$ und $n = 2$ kann die Funktion direkt ein Ergebnis liefern, anderenfalls muss sie sich selbst aufrufen. So wird beispielsweise f_6 folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
f_6 &= f_5 + f_4 \\
&= (f_4 + f_3) + (f_3 + f_2) \\
&= ((f_3 + f_2) + (f_2 + f_1)) + ((f_2 + f_1) + 1) \\
&= (((f_2 + f_1) + 1) + (1 + 1)) + ((1 + 1) + 1) \\
&= (((1 + 1) + 1) + 2) + (2 + 1) \\
&= ((2 + 1) + 2) + 3 \\
&= (3 + 2) + 3 = 5 + 3 = 8
\end{aligned}$$

Dies führt zu einer unnötig hohen Anzahl an Funktionsaufrufen und Folgenglieder werden mehrfach berechnet (z. B. wird f_3 dreimal berechnet).
$\Rightarrow$ Ein iteratives Programm ist effizienter (Übung).

Performance und Effizienz

- Die Performance eines Programms sollte i. d. R. erst optimiert werden, wenn das Programm bereits läuft.
- Matlab bietet eine Funktion `profile`, welche genau misst, welche Funktion und welche Code-Zeilen wie viel Zeit in Anspruch nehmen.
- Für Numerik 1 eher irrelevant, wichtig bei größeren Programmen.

Was man mitnehmen sollte

- Matlab arbeitet mit Matrizen (Zahlen sind (1×1)-Matrizen).
- Unterschied zwischen Skript und Funktion.
- Bei einem = wird der Ausdruck rechts ausgewertet und in die Variable links gespeichert.
- Schleifen (for und while)
- **Nicht hilfreich**: Alle Befehle auswendig kennen.
  Stattdessen: Wissen, welche Möglichkeiten bestehen und bei Bedarf Google benutzen!

Fragen?