EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Fabian Merle

Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23 **Tübingen, 13.06.2023**

Übungsblatt 6

Problem 1. Seien $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\boldsymbol{M}$ orthogonal ist.

b) Geben Sie eine $\boldsymbol{QR}-$Zerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ in eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$ an.

c) Lösen Sie mithilfe der $\boldsymbol{QR}-$Zerlegung das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$.

Problem 2. Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei Householder-Matrizen wieder orthogonal ist.

Problem 3. Zu paarweise verschiedenen reellen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ sind die Lagrangeschen Basispolynome L_i für $0 \leq i \leq n$ definiert durch

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ ist und zeigen Sie, dass für $y_0, ..., y_n \in \mathbb{R}$ das Polynom

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

die Eigenschaft $p(x_i) = y_j$ für $0 \leq j \leq n$ hat.

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) \equiv 1\,.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1 & j = 0\,, \\ 0 & 1 \leq j \leq n\,, \\ (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i & j = n+1\,. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie für den letzten Fall den Fundamentalsatz der Algebra.

.