EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Fabian Merle

Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23 **Tübingen, 23.05.2023**

Übungsblatt 5

Problem 1. Gegeben sind die folgenden Meßdaten:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	3	5	3

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade dieser Meßdaten im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mithilfe der Gaußschen Normalengleichung.

Problem 2. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Zeigen Sie: ist $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = n$, dann sind Lösungen der Normalengleichung eindeutig bestimmt.

Hinweis: Benutzen Sie hierfür die in der Vorlesung gezeigte Identität: $(\mathrm{Im}(\boldsymbol{A}))^\perp = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^\top)$.

Problem 3 (Programmieraufgabe: QR-Zerlegung).

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer(A)`, welche zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $Rang(A) = n$ zwei Matrizen Q, R zurückgibt, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ der für die Zerlegung entscheidende Teil der orthogonalen Matrix $\tilde{Q}$ ist und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist und $A = QR$ gilt. Verwenden Sie dabei den in der Vorlesung vorgestellten Householder-Algorithmus. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function [Q,R] = QRzer(A)
...
end
```

b) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer_loesen(Q,R,b)`, welche Q und R wie in a) beschrieben und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ entgegen nimmt, und die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $QRx = b$ berechnet und zurückgibt. Bestimmen Sie den Vektor x mittels Rückwärtssubstitution. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function [x] = QRzer_loesen(Q,R,b)
...
end
```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_QRzer.m`, welches unter Verwendung der Funktionen `QRzer` und `QRzer_loesen` geeignete Koeffizienten $\gamma_j\ j = 1, ..., 5$ ermittelt, so dass die Funktion

$f(x) = \sum_{j=1}^{5} \gamma_j \phi_j(x)$ mit

$$\phi_1(x) = x^2, \quad \phi_2(x) = x^4, \quad \phi_3(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \phi_4(x) = \exp(-(x-1)), \quad \phi_5(x) = \sin(2\pi x)$$

eine Ausgleichskurve der Messdaten

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x_i)$	100	14	61	68	60	35	22	80	90	105

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate ist. Hierbei dürfen Sie nicht die Gaußsche Normalengleichung verwenden.

Stellen Sie die ermittelte Ausgleichskurve zusammen mit den Messdaten in einem geeigneten Schaubild dar.

.