EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Dr. Fabian Merle

Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23 **Tübingen, 16.05.2023**

Übungsblatt 4

Problem 1. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

a) $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar.

b) Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $a_{ii} > 0$.

c) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind reell.

d) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind positiv.

Problem 2. Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Bandmatrix* mit Bandbreite $p+q+1$, falls es $p, q \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall j > i+p \quad \text{und} \quad i > j+q\,.$$

Wir bezeichnen mit p die obere Bandbreite, und mit q die untere Bandbreite.
Zeigen Sie für eine LR-Zerlegung ohne Pivotierung (sofern sie durchführbar ist), dass dann $\ell_{ij} = 0$ für $i > j+q$ und $r_{ij} = 0$ für $j > i+p$ ist.

Problem 3.

a) Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Leiten Sie einen Algorithmus her, mit dem Sie eine untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erhalten, sodass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top$ gilt.

b) Geben Sie entweder eine Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

im Sinne des ersten Aufgabenteils an oder begründen Sie, warum dies nicht möglich ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, Sie hätten eine solche Zerlegung. Multiplizieren Sie die rechte Seite aus und vergleichen Sie systematisch die Einträge mit denen von $\boldsymbol{A}$. Falls Sie Probleme haben, dies allgemein zu lösen, betrachten Sie zunächst eine $(3\times 3)-$Matrix.

.