



## Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23

Tübingen, 09.05.2023

### Übungsblatt 3

**Problem 1.** Auf  $\mathbb{R}^n$  ist für  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  die Eins-Norm durch

$$\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

definiert. Zeigen Sie, daß die zugehörige Matrizenorm für eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , definiert durch

$$\|A\|_1 := \sup_{\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1}$$

die folgende Relation erfüllt:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{maximale Spaltenbetragssumme}) .$$

**Problem 2.** Die Konditionszahl einer invertierbaren Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist definiert (abhängig von der gewählten Norm) durch

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\| .$$

- Zeigen Sie, daß  $\text{cond}(A) \geq 1$  gilt.
- Sei  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, daß dann  $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ .
- Sei  $1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix. Berechnen Sie  $\text{cond}(1)$  in jeder Norm des  $\mathbb{R}^n$ .
- Die Konditionszahl zur Norm  $\|\cdot\|_2$  wird mit  $\text{cond}_2$  bezeichnet. Sei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix (d.h.,  $QQ^\top = 1$ ). Berechnen Sie  $\text{cond}_2(Q)$ .

### Problem 3 (Programmieraufgabe: LR-Zerlegung)

- Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `LRzer(A)`, welche zu einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Matrizen  $L, R$  der zugehörigen LR-Zerlegung zurückgibt. Sie dürfen hier und im Verlauf der Aufgabe annehmen, daß die Eingabematrix  $A$  eine eindeutige LR-Zerlegung besitzt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```

1     function [L,R] = LRzer(A)
2     ...
3     end

```

b) Schreiben Sie die Matlab-Funktion `LRzer_loesen(L,R,b)`, welche zu gegebener linken unteren und rechter oberen Dreiecksmatrizen  $L$  und  $R$  und einem noch zusätzlich gegebenen Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  die Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  des linearen Gleichungssystems  $(L \cdot R)x = b$  mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution berechnet und zurückgibt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
1     function [x] = LRzer_loesen(L,R,b)
2     ...
3     end
```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_LRzer.m`, welches mit den in a) und b) geschriebenen Funktionen  $Ax = b$  berechnet und ausgibt. Dabei gelten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix}.$$