



Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23

Tübingen, 02.05.2023

Übungsblatt 2

Problem 1. Beweisen Sie: Auf dem \mathbb{R}^n sind alle (Vektor-)Normen äquivalent, d.h.: Zu je zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf dem \mathbb{R}^n gibt es positive Zahlen m, M , sodaß

$$m\|\vec{x}\|_a \leq \|\vec{x}\|_b \leq M\|\vec{x}\|_a \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Zum Nachweis dieser Aussage reicht es, konkret z.B. $\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_\infty$ zu verwenden.

Problem 2. Sei $\|\cdot\|$ eine (Vektor-)Norm auf \mathbb{R}^n , und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $(n \times n)$ -Matrix. Wir definieren

$$\|\|\mathbf{A}\|\| := \sup_{\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}.$$

- Zeigen Sie für die Einheitsmatrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, daß $\|\|\mathbf{I}\|\| = 1$ ist.
- Zeigen Sie für zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, daß $\|\|\mathbf{AB}\|\| \leq \|\|\mathbf{A}\|\| \|\|\mathbf{B}\|\|$.
- Zeigen Sie, daß $\|\|\mathbf{A}\|\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|$.
- Zeigen Sie, daß für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|\mathbf{A}\vec{x}\| \leq \|\|\mathbf{A}\|\| \|\vec{x}\|$ gilt.
- Zeigen Sie, daß $\|\|\cdot\|\|$ eine Norm auf dem Raum der $(n \times n)$ -Matrizen ist.

Problem 3. Sei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindender Diagonale, d.h.

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $r_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei weiter $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Entwickeln Sie einen Algorithmus, mit welchem Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{R}\vec{x} = \vec{b}$ lösen können. Wieviele elementare Rechenschritte (abhängig von der Dimension n) benötigen Sie hierfür?
- Wie berechnen Sie die Determinante von \mathbf{R} mit möglichst wenig Rechenoperationen? Wieviele Rechenoperationen sind hierfür nötig?

c) Was ändert sich, wenn es sich um eine linke untere Dreiecksmatrix L handelt?

Hinweis: Ein elementarer Rechenschritt ist eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division.

.