



Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 23

Tübingen, 11.07.2023

Übungsblatt 10

Dieses Übungsblatt dient zur Vorbereitung der Klausur — und wiederholt damit einige Themen der Vorlesung. Bitte beachten Sie, dass der gesamte Vorlesungsstoff Grundlage für die Klausur sein wird.

Problem 1. Beantworten Sie die folgenden Fragen mit **Ja** oder **Nein**.

- Das Lösen eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ist optimal konditioniert, wenn die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal ist.
- Jede Matrixnorm kann über die maximale Betragszeilensumme der Matrix berechnet werden.
- Jede quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine \mathbf{QR} -Zerlegung, d.h. es existieren eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.
- Das Produkt zweier Householder-Matrizen ist wieder eine Householder-Matrix.
- Der Lagrange'sche und der Newton'sche Ansatz zur Bestimmung des Interpolationspolynoms ergeben das gleiche Interpolationspolynom.

Problem 2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und es existieren eine linke untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$.

- Geben Sie einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(n)$ Rechenschritten überprüft, ob \mathbf{A} invertierbar ist.
- Beweisen oder widerlegen Sie, ob eine solche Zerlegung in \mathbf{L} und \mathbf{R} eindeutig ist.
- Führen Sie eine \mathbf{LR} -Zerlegung (ohne Pivotierung) durch der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Problem 3. Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Leiten Sie für drei äquidistante Stützstellen die zugehörigen abgeschlossenen Newton-Cotes Quadraturformeln her und schreiben Sie diese in der Form

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i f(b_i),$$

mit zu bestimmenden Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$ und zu bestimmenden Knoten $\{b_i\}_{i=0}^2$. Unter welchem Namen ist die Quadraturformel bekannt?

