Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 02. 07. 2012

11. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker und Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 28 (Tschebyscheff-Interpolation, FFT): Laut Vorlesung gilt für die Koeffizienten des Tschebyscheff-Interpolationspolynoms

$$c_k = \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \cos(kt_j) f_j \tag{1}$$

mit $t_j = \frac{2j+1}{2n+2}\pi$. Für $j = 0, \ldots, n$ definiren wir $f_{-(j+1)} := f_j$ und finden mit $-t_j = t_{-(j+1)}$ die Darstellung

$$c_k = \frac{e^{ik\pi/N}}{n+1}\sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{jk}, \tag{2}$$

wobei $N = 2n+2$ gilt und die endliche Folge f_j periodisch fortgesetzt sei.

Untersuchen Sie den Aufwand zur Berechnung der c_k in den Formel (1) und (2) auch in Hinblick auf FFT. Freiwillig: Leiten Sie die Formel (2) her.

Aufgabe 29 (Tschebyscheff-Interpolation, FFT): Berechnen Sie möglichst effizient für $f_i = i,\ i = 0, \ldots, 3$, die Koeffizienten der Tschebyscheff-Darstellung des Interpolationspolynoms. Hinweis: Beachten Sie die vorherige Aufgabe.

Aufgabe 30 (Zweidimensionale diskrete FT): Die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation $\mathcal{F}(X) = \hat{X}$ von $X = (x_{m,n}) \in \mathbb{C}^{M\times N}$ ist durch

$$\hat{x}_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} w_M^{mk} w_N^{nl}$$

und die Faltung $X * Y \in \mathbb{C}^{M\times N}$ durch

$$(X*Y)_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} y_{k-m,l-n}$$

$(k = 0, \ldots, M-1,\ l = 0, \ldots, N-1,)$ gegeben.
Beweisen Sie: Wie im eindimensionalem Fall gilt

$$X * Y = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(X)\cdot\mathcal{F}(Y)\big),$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite wiederum komponentenweise zu verstehen ist und

$$\big(\mathcal{F}^{-1}(X)\big)_{m,n} = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} x_{k,l} w_M^{-mk} w_N^{-nl}$$

gilt.

Die Klausur findet am Freitag, den 27. 07. 2012, von 13.00 – 15.00 Uhr im Hörsaal N3 statt.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.