Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 04. 06. 2012

7. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker und Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 18 (Konvergenz von Fixpunktiterationen):

Gegeben sei die Funktion $f(x) = xe^{x-2} - 1$

(1) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle x^* im Intervall [1,2] besitzt.

(2) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} F_1(x) &:= e^{2-x} \\ F_2(x) &:= 2 - \ln(x) \end{aligned}$$

Iterationsverfahren zur Berechnung von x^* bilden, d.h. die Fixpunkte von F_i mit den Nullstellen von f übereinstimmen. Treffen Sie Aussagen über die Konvergenz der Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = F_i(x_k),$$

indem Sie verschiedene Startwerte x_0 im Intervall [1,2] wählen und einige Iterationen durchführen.

(3) Wenden Sie ebenfalls das Newton-Verfahren auf die Gleichung $f(x) = 0$ an.

Aufgabe 19 (Stabiler Fixpunkt):

Zeigen Sie, dass die Iteration $x_{k+1} = \cos(x_k)$ für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt $x^* = \cos(x^*)$ konvergiert.

Aufgabe 20 (Bisektionsverfahren):

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Nullstelle x^* in]a,b[.
Das Bisektionsverfahren versucht durch Intervallhalbierung eine Nullstelle genauer zu lokalisieren. Im ersten Schritt bildet man dazu $s = \frac{1}{2}(a + b)$ und berechnet $f(s)$.

1) $f(s) = 0$. Dann ist s eine Nullstelle von f.
2) $f(a)f(s) < 0$. Dann liegt eine Nullstelle x^* in]a,s[.
3) $f(s)f(b) < 0$. Dann liegt eine Nullstelle x^* in]s,b[.

Mit dem entsprechenden Intervall wird der Schritt wiederholt.

(1) Zeigen Sie: Wählt man nach der k-ten Wiederholung des oben beschriebenen Vorgehens ein x aus dem verbleibenden Intervall als Näherung, so gilt:

$$|x^* - x| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

(2) Erläutern Sie das Vorgehen bis zum 3-ten Schritt anhand einer grafischen Darstellung.

(3) Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudo-Code.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.