

5. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker und Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 12 (Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

(1) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

tritt bei Durchführung der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl Gleichheit in der Abschätzung

$$\rho_n(A) = \frac{\alpha_{max}}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2^{n-1}$$

auf.

(2) Zeigen Sie: $\rho_n(A) \leq n$, falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix ist. Wie lässt sich die Matrix A aus Teilaufgabe (1) modifizieren, so dass Gleichheit $\rho_n(A) = n$ gilt?

Aufgabe 13 (Eigenschaften symmetrischer, positiv definiten Matrizen):

Zeigen Sie, dass für jede symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

- (1) A ist invertierbar.
- (2) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$.
- (3) Die Eigenwerte von A sind positiv.
- (4)

$$\max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}| = \max_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|.$$

Interpretieren Sie das Resultat im Zusammenhang mit der Spaltenpivotwahl.

Aufgabe 14:

Schreiben Sie ein Programm, das die Näherungswerte $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx e^x$ berechnet (und sinnvollerweise plottet) für $x = -5,5$ und $n = 1, 2, \dots, 30$. Die Berechnung soll auf folgende drei Arten erfolgen:

- (1) mittels obiger Formel
- (2) mit der Umformung $e^{-5,5} = 1/e^{5,5}$ und obiger Formel
- (3) mit der Umformung $e^{-5,5} = (e^{-0,5})^{11}$ und obiger Formel

Erklären Sie die beobachteten Effekte. Welches zusätzliche Phänomen tritt für $x = -20$ auf?

Hinweis: In Matlab und octave wird die Darstellung der Zahlenwerte in erhöhter Genauigkeit mit dem Befehl `format long` eingeschaltet.

Aufgabe 15 (Cholesky-Zerlegung):

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A berechnen.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.