Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 07. 05. 2012

4. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker und Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 9 (Stabilität der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

Spaltenpivotwahl: Bei der Spaltenpivotwahl wird das betragsmäßig größte Element der Restspalte als Pivotelement gewählt, d.h. beim k-ten Eliminationsschritt $A^{(k-1)} \to A^{(k)}$ wird $a_{jk}^{(k-1)}$ mit

$$|a_{jk}^{(k-1)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

als Pivotelement gewählt.

(1) Zeigen Sie, dass bei der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl

$$|l_{ij}| \le 1$$

für die Einträge der Matrix L gilt.

(2) Zeigen Sie, dass die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl einer oberen Hessenberg-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die Hessenberg-Struktur in den Restmatrizen erhält.

Aufgabe 10 (Kondition und Stabilität der Addition von n Zahlen):

Wir betrachten $S(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i$ und bezeichnen mit $\widehat{S}(x)$ die Gleitpunktrealisierung dieser Operation, welche die Zahlen der Reihe nach aufaddiert.

(1) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems bezüglich der Betragssummennorm, d.h. die minimale Zahl κ_1 mit

$$\frac{|S(x) - S(\bar{x})|}{|S(x)|} \le \kappa_1 \frac{\|x - \bar{x}\|_1}{\|x\|_1}.$$

(2) Weisen Sie die Stabilität im Sinne der Vorwärtsanalyse von $\widehat{S}(x)$ nach, d.h. für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ aus Gleitpunktzahlen gilt:

$$\frac{|S(x) - \widehat{S}(x)|}{|S(x)|} \le (n-1)\kappa_1 \cdot eps + \mathcal{O}(eps^2).$$

Aufgabe 11:

Seien A und T $(n \times n)$-Matrizen und T invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der $T^{-1}AT$ in $\frac{7}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus $T^{-1}AT$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.