

3. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker und Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 7 (Vermeidbare Auslöschung):

Die Subtraktion zweier annähernd gleicher Zahlen führt zur Stellenauslöschung, wodurch Eingabefehler verstärkt werden. Dieses Problem ist somit schlecht konditioniert. Wann immer es daher möglich ist, sollte man die Subtraktion zweier annähernd gleicher Zahlen vermeiden.

Wir betrachten eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px + q = 0,$$

die eine Nullstelle in der Nähe von Null besitzt. Es tritt somit Stellenauslöschung bei folgender Berechnung der Nullstellen auf.

$$x_{1/2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Geben Sie eine auslöschungsfreie Formel der Nullstellen an, indem Sie ausnutzen, dass q das Produkt der Nullstellen ist (Satz von Vieta).

Aufgabe 8 (Fehlerfortpflanzung):

Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\frac{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi_i(x, y)}{\varphi_i(x, y)}$$

der Operationen

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= x + y \\ \varphi_2(x, y) &= x \cdot y\end{aligned}$$

mit den gestörten Eingabedaten

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x(1 + \varepsilon_x) \\ \bar{y} &= y(1 + \varepsilon_y).\end{aligned}$$

Wie werden die Eingabefehler ε_x und ε_y verstärkt? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in Aufgabe 7 beschriebenen Phänomen der Auslöschung.

Aufgabe P1 (Programmieraufgabe: Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

Implementieren Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotwahl, indem Sie folgende Teilaufgaben lösen:

- (1) LR-Zerlegung (zunächst ohne, dann mit Spaltenpivotwahl),
- (2) Vorwärtssubstitution: $Lc = b \in \mathbb{R}^n$ mit unterer Dreiecksmatrix L (Aufgabe 1),
- (3) Rückwärtssubstitution: $Rx = c \in \mathbb{R}^n$ mit oberer Dreiecksmatrix R .

Die Strukturen der Matlab-Funktion sollen folgende Form besitzen:

```
function c = VorSub(L,b)
    :
end
```

(Rückwärtssubstitution entsprechend)

```
function [P,L,R] = LRZer(A)
    :
end
```

Testen Sie Ihr Programm an den Systemen $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -4 \\ 4 & -2 & 10 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(keine Spaltenpivotwahl nötig) und mit den Instanzen der Aufgabe 3 realisiert in einer Datei `main.m`.

Allgemeine Hinweise:

- (1) Abgabe des Matlab-Programms bis zum 14.05.2012.
- (2) Der Quellcode muss leicht nachvollziehbar sein, d.h. er muss übersichtlich und gut kommentiert sein.
- (3) Die Programmieraufgabe kann in Zusammenarbeit von maximal 4 Personen erfolgen.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.