Beweis: Wir nehmen an $|q(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Es gilt nach Folgerung (ii)

$$T_n(1) = 1$$
$$T_n(\cos\frac{\pi}{n}) = -1.$$

Wir betrachten die Differenz $T_n(x) - q(x)$ auf dem Intervall $[\cos\frac{\pi}{n}, 1]$. Da nach Voraussetzung T_n und q den selben Koeffizienten vor x^n besitzen, nämlich 2^{n-1} gilt

$$\deg T_n - q \leq n - 1.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt $T_n(x)-q(x)$ mindestens eine Nullstelle in $[\cos\frac{\pi}{n}, 1]$. Beachte dazu: Entweder besitzt $T_n(x)-q(x)$ bereits eine Nullstelle in einem Randpunkt oder es gilt $T_n(\cos\frac{\pi}{n})-q(\cos\frac{\pi}{n}) < 0$ und $T_n(1) - q(1) > 0$.
Entsprechend folgt:

$$\begin{array}{lll} T_n(x) - q(x) & \text{hat (mindestens) eine Nullstelle in} & [\cos\frac{2}{n}\pi, \cos\frac{\pi}{n}] \\ T_n(x) - q(x) & \text{hat (mindestens) eine Nullstelle in} & [\cos\frac{3}{n}\pi, \cos\frac{2}{n}\pi] \\ & \vdots & \\ T_n(x) - q(x) & \text{hat (mindestens) eine Nullstelle in} & [-1, \cos\frac{n-1}{n}\pi], \end{array}$$

also besitzt $T_n(x) - q(x)$ insgesamt n Nullstellen in $[-1, 1]$. Beachte wiederum: Fallen zwei Nullstellen in einem Randpunkt der einzelnen Intervalle zusammen, so handelt es sich um eine doppelte Nullstelle, da T_n und q dort ein Extremum besitzen.
Da aber das Polynom $T_n - q$ höchstens den Grad $n - 1$ besitzt, handelt es sich um das Nullpolynom:

$$T_n = q.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, die daher falsch sein muss.

□

Beweis:(zu Satz 20) Es gilt:

$$\max_{x\in[-1,1]} |w_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n} \max_{x\in[-1,1]} |\underbrace{2^n w_{n+1}(x)}_{=2^n x^{n+1}+\ldots}|.$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus dem vorangehenden Lemma (vgl. Ü).

□

Satz 21. *Für die Lebesgue-Konstanten zu den Tschebyscheff-Stützstellen gilt:*

$$\Lambda_n \leq 3 \text{ für } n \leq 20$$
$$\Lambda_n \leq 4 \text{ für } n \leq 100$$
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \log n \text{ für } n \to \infty.$$

Vergleiche mit den Lebesgue-Konstanten bei äquidistanten Stützstellen!

Wir wissen, dass die Tschebyscheff-Polynome $T_0, \ldots, T_n$ eine Basis des Vektorraums P_n bilden. Sie sind bezüglich des Skalarprodukts

$$< p, q > := \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$$

orthogonal, wobei x_i die Nullstellen von T_{n+1} sind. Tatsächlich gilt (ohne Beweis)

$$< T_k, T_j > = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad k \neq j \text{ (Orthogonalität)} \\ \frac{1}{2}(n+1), & \text{falls} \quad k = j > 0 \\ (n+1), & \text{falls} \quad k = j = 0 \end{cases}$$

für $k, j \leq n$.

Mit der Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome folgt

$$p = p(f|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{< p, T_i >}{< T_i, T_i >}}_{=:c_i \text{ bzw. } \frac{c_0}{2} \text{ für i=0}} T_i$$

und mit der Definition des Skalarproduktes oben

$$\begin{aligned} < p, T_k > &= \sum_{i=0}^{n} p(x_i) T_k(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) T_k(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_i \cos\left(k \frac{2i+1}{2n+2} \pi\right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit den folgenden Satz.

Satz 22. *(Tschebyscheffsche Interpolationsformel) Zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$, wobei die Stützstellen genau den Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} entsprechen, lässt sich das eindeutige Interpolationspolynom $p(x) = p(f|x_0, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq n$ darstellen durch*

$$p(x) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x) \tag{3.8}$$

mit

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f_i \cos\left(k \frac{2i+1}{2n+2} \pi\right)$$

für $k \geq 0$.

Zu den speziellen Stützstellen $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$ steht und somit neben der Lagrangeschen und der Newtonschen eine weitere Interpolationsformel zur Verfügung.

Fragen: Wie effizient lassen sich die Koeffizienten c_k berechnen? Lässt sich $p(x)$ in der Form (3.8) leicht auswerten?

a) Die direkte Berechnung der c_k erfordert $(n+1)^2$ Multiplikationen. Die schnelle Fourier-Transformation (FFF) benötigt $\mathcal{O}(n \log n)$ Multiplikationen. Zum Vergleich: Berechnung der dividierten Differenzen der Newtonschen Interpolationsformal benötigt $\frac{n(n+1)}{2}$ Divisionen. Für hinreichend große n ist es daher zweckmäßig die Koeffizienten mit FFT zu berechnen. Dabei ist es günstig, wenn $n+1 = 2^m$ eine 2-er Potenz ist.

b) Das Polynom $p(x)$ lässt sich bei bekannten Koeffizienten leicht berechnen:

Satz 23. *(Clenshaw-Algorithmus) Sei $p(x)$ ein Polynom mit*

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Sei weiter $d_{n+2} = d_{n+1} = 0$ und

$$d_k = c_k + 2x \cdot d_{k+1} - d_{k+2} \text{ für } k = n, n-1, \ldots, 1.$$

Dann gilt:

$$p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2).$$

Bemerkung 17. *Der Aufwand zur Berechnung von $p(x)$ ist somit $n+1$ Multiplikationen und $2(n+1)$ Additionen.*

Beweis: Zunächst gilt $d_n = c_n$. Mit der Rekursionsformel

$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_{n-3}T_{n-3}(x) + (c_{n-2} - d_n)T_{n-2}(x) + (\underbrace{c_{n-1} + 2xd_n}_{=d_{n-1}})T_{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_{n-4}T_{n-4}(x) + (c_{n-3} - d_{n-1})T_{n-3}(x) + (\underbrace{c_{n-2} - d_n + 2xd_{n-1}}_{=d_{n-2}})T_{n-2}(x) \\
&= \ldots \text{ (induktiv)} \\
&= \frac{1}{2}c_0 + (c_1 - d_3)\underbrace{T_1(x)}_{=x} + d_2 \underbrace{T_2(x)}_{=2x^2-1} \\
&= \frac{1}{2}c_0 + x(c_1 + 2xd_2 - d_3) - d_2 \\
&= \frac{1}{2}c_0 + xd_1 - d_2 \\
&= \frac{1}{2}(d_0 - d_2).
\end{aligned}$$

$\square$

Allgemein ist bei Verwendung von Rekursionen wichtig, wie sich Fehler (z.B. Rundungsfehler) fortpflanzen, also die Stabilität der Rekursion. Mit anderen Worten: "Kleine" Fehler am Beginn der Rechnung, sollen keine "großen" Auswirkungen auf die spätere Rechnung haben.

Beispiel 17. *(einer instabilen Rekursion)*
Gegeben sei die Rekursion $x_{n+1} = 10x_n - 9$ *mit Startwert*
a) $x_1 = 1$. *Dann gilt* $x_n = 1$ *für alle* n.

b) $\tilde{x}_1 = 1 + \epsilon$. *Dann gilt* $\tilde{x}_n = 1 + 10^{n-1}\epsilon$ *für alle* n.

Satz 24. *(über die Stabilität des Clenshaw-Algorithmus) Sei* $p(x)$ *wie in Satz 23 und* $\tilde{d}_k$ *durch folgende Rekursion berechnet:*

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{d}_{n+2} = \tilde{d}_{n+1} \\ \tilde{d}_k &= c_k 2x \cdot \tilde{d}_{k+1} - \tilde{d}_{k+2} + \epsilon_k \end{aligned}$$

für $k = n, n, \ldots, 1$, *wobei* ϵ_k *zum Beispiel Rundungsfehler im* k*-ten Schritt sind. Dann gilt:*

$$|\underbrace{\frac{1}{2}(\tilde{d}_0 - \tilde{d}_2)}_{=:\tilde{p}(x)} - p(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |\epsilon_i|$$

für $|x| \leq 1$.

Beweis: Setze $e_k := \tilde{d}_k - d_k$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} e_{n+2} &= e_{n+1} = 0 \\ e_k &= \epsilon_k + 2x \cdot e_{k+1} - e_{k+2} \text{ für } k = n, n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Somit nach Satz 23

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\epsilon_0 - e_2)}_{=\tilde{p}(x) - p(x)} = \epsilon_0 + \epsilon_1 T_1(x) + \ldots + \epsilon_n T_n(x).$$

Wegen $|T_j(x)| \leq 1$ für $|x| \leq 1$ folgt

$$|\tilde{p}(x) - p(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |\epsilon_i|.$$

$\square$

Bemerkung 18. *Approximationen durch Summe von Tschebyscheff-Polynomen werden im Rechner zur Berechnung von Funktionen wie* $\log, \exp, \sin, \cos, \ldots$ *verwendet.*

Beispiel 18. *Berechnung von* $\log(x)$ *für* $0 < x_{min} \leq x \leq x_{max}$, *wobei* x_{min} *und* x_{max} *die kleinste bzw. die größte darstellbare Zahl im Rechner sind.*
Gleitpunktdarstellung (mit $d = 2$*):*

$$x = a \cdot 2^{N+1}$$

mit $a = \sum_{i=1}^{l} a_i 2^{-i}$ *und* $a_i \in \{0, 1\}$, $a_1 = 1$. *Also existiert ein* $t \in [0, 1)$ *mit*

$$x = (1 + t) \cdot 2^N.$$

Mit dem Additionstheorem des Logarithmus erhalten wir

$$\log x = \log(1+t) + N \log 2.$$

Wir Approximieren $\log(1+t)$ *auf* $[0,1]$ *bzw.* $\log\left(1+\frac{1+s}{2}\right)$ *auf dem Intervall* $[-1,1]$ *durch Tschebyscheff-Interpolation. Für den Approximationsfehler gilt nach Satz 19*

$$|\log\left(1+\frac{1+x}{2}\right) - p(x)| \leq \frac{|w_{n+1}(x)|}{(n+1)!}|\Big(\log\left(1+\frac{1+\xi}{2}\right)\Big)^{(n+1)}|.$$

Beachte:

$$\Big(\log\left(1+\frac{1+x}{2}\right)\Big)' = \frac{1}{1+\frac{1+x}{2}}\frac{1}{2},$$

also auch

$$\begin{aligned}\Big(\log\left(1+\frac{1+x}{2}\right)\Big)^{(n+1)} &= (\frac{1}{1+\frac{1+x}{2}})^{(n)}\frac{1}{2}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{(-1)^n n!}{(1+\frac{1+x}{2})^{n+1}}.\end{aligned}$$

Somit gilt für den Interpolationsfehler die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\log\left(1+\frac{1+x}{2}\right) - p(x)| &\leq \frac{1}{2^n(n+1)!}\frac{n!}{2^{n+1}|1+\frac{1+x}{2}|^{n+1}}\\ &\leq \frac{1}{2(n+1)4^n}.\end{aligned}$$

Zum Beispiel gilt für $n = 16$

$$|\log\left(1+\frac{1+x}{2}\right) - p(x)| \leq 10^{-11}.$$