3.1.3 Newtonsche Interpolationsformel / Dividierte Differenzen

Das Verfahren von Neville ist unpraktisch, wenn man das Polynom selbst sucht oder das Polynom an mehreren Stellen auswerten will. Für diese Fälle eignet sich der Newton-Algorithmus. Wir schreiben:

$$p(f|x_0,\dots,x_n) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}). \tag{3.5}$$

Beobachtungen:

(i) Darstellungen eines Polynoms $p(x)$ vom Grad $\leq n$:

a) $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$ zur Basis der Monome $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

b) $p(x) = b_0 L_0(x) + b_1 L_1(x) + \dots + b_n L_n(x)$ zur Basis der Lagrange-Polynome $\{L_0(x), \dots, L_n(x)\}$.

c) $p(x) = a_0 + a_1 w_1(x) + \dots + a_n w_n(x)$ zur Newton-Basis $\{w_0(x), \dots, w_n(x)\}$ mit

$$w_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j).$$

Einfache Folgerung $a_n = c_n$ und

$$p(f|x_0,\dots,x_n) = p(f|x_0,\dots,x_{n-1}) + a_n w_n(x), \tag{3.6}$$

da $w_n(x_i) = 0$ für $i = 0, \dots, n-1$.

(ii) Das Polynom $p(x)$ in Darstellung (3.5) bzw. (i) c) lässt sich (wie auch die Darstellung in (i) a)) durch das so genannte Horner-Schema auswerten:

$$p(\xi) = a_0 + (\xi - x_0)\cdot\Big(a_1 + (\xi-x_1)\Big(a_2 + \dots(\xi - x_{n-2})\Big(a_{n-1} + (\xi - x_{n-1})a_n\Big)\dots\Big)\Big),$$

wobei die Koeffizienten a_i nacheinander aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} f_0 &= p(x_0) = a_0 \\ f_1 &= p(x_1) = a_0 + (x_1-x_0)a_1 \\ f_2 &= p(x_2) = a_0 + (x_2-x_0)a_1 + (x_2-x_0)(x_2-x_1)a_2, \text{ usw.} \end{aligned} \tag{3.7}$$

bestimmt werden können.

Aufwand der Koeffizientenbestimmung durch (3.7):
a_1: 2 Additionen, 1 Division
a_2: 4 Additionen, 2 Multiplikationen, 1 Division
a_3: 6 Additionen, 4 Multiplikationen, 1 Division

a_i: $2i$ Additionen, $2(i-1)$ Multiplikationen, 1 Division

Insgesamt:
n Divisionen
$n(n-1)$ Multiplikationen
$n(n+1)$ Additionen

Definition 9. *Wir nennen den Koeffizienten a_n in (3.6) die n-te dividierte Differenz von f zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$, und wir schreiben*

$$f[x_0,\dots,x_n] := a_n.$$

Wir nennen die Koeffizienten bezüglich der Newton-Basis (die a_i in obiger Beobachtung (i) c)) die dividierten Differenzen von f zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$.

Frage: Lassen sich die dividierten Differenzen billiger bestimmen als durch Darstellung (3.7)?

1. Definiere jeweils die 0-te Differenz von f zu der Stützstelle x_i durch

$$f[x_i] := f_i.$$

Wir finden mit Formel (3.4)

$$\begin{aligned}
\underbrace{p(f|x_i, x_{i+1})}_{=f[x_i]+(x-x_i)f[x_i,x_{i+1}]} &= \frac{(x_i - x)p(f|x_{i+1}) - (x_{i+1} - x)p(f|x_i)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= \frac{(x_i - x)f[x_{i+1}] - (x_{i+1} - x)f[x_i]}{x_i - x_{i+1}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{(x_i - x)f[x_{i+1}] - (x_i - x)f[x_i]}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{1}{x - x_i} \\
&= \frac{f[x_i] - f[x_{i+1}]}{x_i - x_{i+1}},
\end{aligned}$$

d.h. die 1-te dividierte Differenz zweier (benachbarter) Stellen lassen sich leicht aus den entsprechenden Stützwerten durch "dividierte Differenzen" berechnen.

2. Wir gehen nun davon aus, dass die $(n-1)$-ten dividierten Differenzen $f[x_1, \ldots, x_n]$ und $f[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ bekannt sind. Wiederum mit Formel (3.4) und (3.6) finden wir

$$\begin{aligned}
p(f|x_0, \ldots, x_n) &= p(f|x_0, \ldots, x_{n-1}) + f[x_0, \ldots, x_n]w_n(x) \\
&= \frac{(x_0 - x)p(f|x_1, \ldots, x_n) - (x_n - x)p(f|x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_0 - x_n}.
\end{aligned}$$

Nach Koeffizientenvergleich des Faktors x^n erhalten wir

$$\begin{aligned}
f[x_0, \ldots, x_n] &= -\frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_0 - x_n} \\
&= \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}.
\end{aligned}$$

Anordnung der dividierten Differenzen im so genannten Differenzenschema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f_0 & = & f[x_0] & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
f_1 & = & f[x_1] & \to & f[x_0, x_1] & & & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
f_2 & = & f[x_2] & \to & f[x_1, x_2] & \to & f[x_0, x_1, x_2] & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & \searrow & & & \\
f_{n-1} & = & f[x_{n-1}] & \to & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & \to & \ldots & \to & f[x_0, \ldots, x_{n-1}] & & \\
 & & & \searrow & & & & & & \searrow & \\
f_n & = & f[x_n] & \to & f[x_{n-1}, x_n] & \to & \ldots & \to & f[x_1, \ldots, x_n] & \to & f[x_0, \ldots, x_n]
\end{array}$$

Die Hauptdiagonale liefert die Koeffizienten von $p(f|x_0, \ldots, x_n)$.

Aufwand:
2-te Spalte: $2n$ Additionen, n Divisionen
3-te Spalte: $2(n-1)$ Additionen, $n-1$ Divisionen

Insgesamt:
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ Divisionen
$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$ Additionen
Billiger als Koeffizientenbestimmung durch (3.7).

Satz 18. *(Newtonsche Interpolationsformel) Zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i existiert genau ein Interpolationspolynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, welches gegeben ist durch*

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \ldots + (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n],$$

wobei die dividierten Differenzen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} f[x_i] &:= f_i, \\ f[x_i, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}} \end{aligned}$$

für $1 \leq k \leq n - i$.

3.1.4 Das Restglied der Polynominterpolation

Wir untersuchen nun die Approximationseigenschaft des Interpolationspolynoms $p(x)$ von f in den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, d.h. den Fehler

$$f(x) - p(x).$$

Satz 19. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $p(x)$ das Interpolationspolynom von f in den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ vom Grad $\leq n$. Dann existiert zu jedem $x \in [a, b]$ eine Zwischenstelle $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ mit*

$$f(x) - p(x) = w_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Beweis: Wir setzen

$$F(x) = f(x) - p(x) - K \cdot w_{n+1}(x)$$

und bestimmen für ein $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$, die Konstante K so, dass $F(\bar{x}) = 0$ gilt. Dies ist möglich da $w_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$.
Insgesamt besitzt F somit $n+2$ Nullstellen und nach dem Satz von Rolle die Ableitung F' noch $n+1$ Nullstellen usw. Schließlich besitzt $F^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$ eine Nullstelle $\xi = \xi(\bar{x})$. Daher gilt

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)!$$

und mit Auflösung nach K die Behauptung des Satzes.

□

Mit Darstellung (3.6) und dem vorangegangenen Beweis gilt

$$f[x_0, \dots, x_{i-1}, \bar{x}, x_i, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

falls $x_{i-1} < \bar{x} < x_i$.

Betrachten wir die Funktionsklasse

$$\mathcal{F} = \{f \in C^{n+1}([a,b]) | \max_{\tau \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\tau)| \leq M(n+1)!\}$$

für eine Konstante $M > 0$, so hängt der Approximationsfehler offenbar entscheidend von der Wahl der Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ in Form von

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

ab. In der Tat ist die Approximationseigenschaft von Interpolationspolynomen im Allgemeinen nicht so gut, wie der Weierstraßsche Approximationssatz Satz 15 vermuten lässt. Im nächsten Abschnitt werden wir jedoch zeigen wie sich

$$\max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)|$$

bei entsprechender Wahl der Stützstellen minimieren lässt.

3.1.5 Tschebyscheff-Interpolation

Ziel: Approximation von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch Interpolationspolynome mit möglichst “günstigen” Stützstellen (gute Kondition, optimale Approximation von $f \in \mathcal{F}$).

Ohne Einschränkung sei $[a,b] = [-1,1]$. Denn mit der affine Transformation

$$\begin{array}{rcl} [-1,1] & \longleftrightarrow & [a,b] \\ x & \longmapsto & \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x = y \\ \frac{2}{b-a}y - \frac{a+b}{b-a} & \longleftarrow\!\!| & y \end{array}$$

lässt sich das Intervall $[a,b]$ in das Intervall $[-1,1]$ überführen ohne die Interpolations- und Approximationseigenschaften zu verändern.
Wir definieren rekursiv die Tschebyscheff-Polynome

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Das Polynom T_n vom Grad n ist ebenfalls gegeben durch:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x).$$

Beweis durch Induktion: $n = 0$ und $n = 1$ klar. Sei die Behauptung für n gezeigt. Mit der Definition der Teschbyscheff-Polynome gilt:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &= 2x \cdot \cos(n \cdot \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x) \\ &= \underbrace{2\underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x} \cdot \cos(n \cdot \arccos x)}_{=\cos((n+1)\varphi)+\cos((n-1)\varphi)} - \cos((n-1)\underbrace{\arccos x}_{=:\varphi}) \\ &= \cos((n+1)\varphi). \end{aligned}$$

Beachte: Nach dem Additionstheorem des Cosinus gilt:

$$\cos(n\varphi + \varphi) + \cos(n\varphi - \varphi) = 2\cos(n\varphi)\cos(\varphi).$$

Folgerungen:

(i) Die Nullstellen von T_n sind $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n-1$.

(ii) $T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = (-1)^k$ für $k = 0, \dots, n$

(iii) $|T_n(x)| \leq 1$ für $|x| \leq 1$

(iv) Der Koeffizient von x^n ist 2^{n-1}

Beispiel 16.

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2^2x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2^3x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

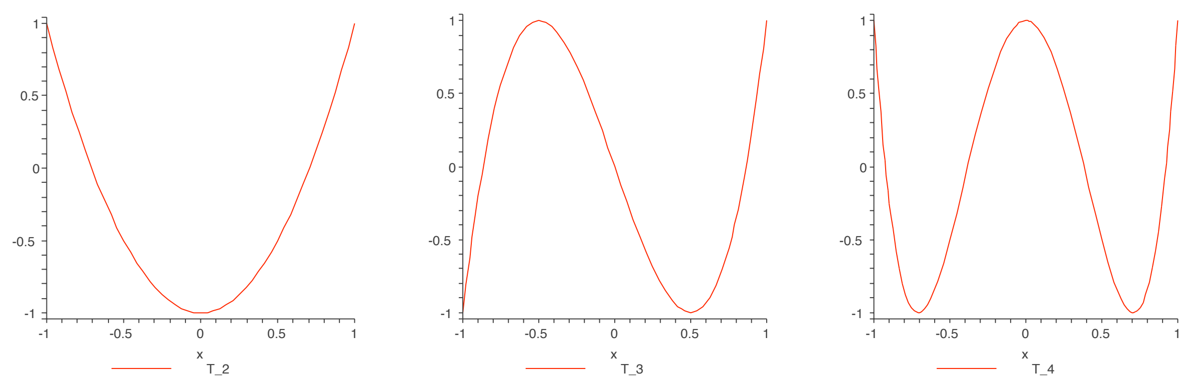

Abbildung 3.1: Tschebyscheff-Polynome T_2, T_3 und T_4.

Satz 20. *Unter allen* $(x_0, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ *wird* $\max\limits_{x \in [-1,1]} |w_{n+1}(x)|$ *minimal, wenn die* x_i *genau die Nullstellen des* $(n+1)$*-ten Tschebyscheff-Polynoms* T_{n+1} *sind, d.h. wenn*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \text{ für } k = 0, \dots, n$$

gilt. Der minimale Wert ist 2^{-n}.

Zum Beweis des Satzes benutzen wir folgendes Resultat:

Lemma 4. *Sei* $q(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ *ein Polynom vom Grad* $\leq n$ *ungleich des* n*-ten Tschebyscheff-Polynoms* T_n*. Dann gilt:*

$$\max_{x \in [-1,1]} |q(x)| > 1 = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|.$$