Kapitel 3

Interpolation und Approximation

Problem:

a) Suche für Stützpunkte $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_i) = f_i.$$

b) Suche für eine gegebene Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine möglichst einfach auszuwertende Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Polynome, stückweise Polynome, trigonometrische Funktionen,...), so dass $f - p$ "klein" ist, z.B.

(i) $\displaystyle\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx = \min!$

(ii) $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| = \min!$

(iii) zusätzlich zu (i) oder (ii): für endlich viele Punkte $f(x) = p(x)$ (Interpolation).

Satz 15. *(Weierstraßscher Approximationssatz) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann existiert für jedes (noch so kleine) $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl n und ein Polynom vom Grad n mit*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \epsilon.$$

3.1 Polynominterpolation

Situation wie in a): Gegeben sind $n + 1$ Stützwerte $f_i := f(x_i)$ einer Funktion f an den Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Suche: Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_i) = f_i \text{ für } i = 0, \ldots, n.$$

Wir sagen: Das Polynom p interpoliert f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$.

Die Polynominterpolation ist wichtig in der Theorie der numerischen Integration und bei der Realisierung von Extrapolationsverfahren (siehe Kapitel 4).

Fragen: Existiert ein solches Polynom? Gibt es mehrere Polynome die f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ interpolieren?

Zur Eindeutigkeit: Wir wissen: Eine Gerade ist durch Vorgabe von zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt. Eine Parabel ist durch Vorgabe dreier Punkte (an paarweise verschiedenen Stellen) eindeutig bestimmt.

Allgemein: Ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist durch Vorgabe von $n+1$ Punkten (an paarweise verschiedenen Stellen) eindeutig bestimmt. Denn: Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_i) - q(x_i) = 0$$

für paarweise verschiedene $x_0, \ldots, x_n$, so besitzt das Differenzpolynom $p(x) - q(x)$ einen Grad $\leq n$ und $n+1$ verschiedene Nullstellen. Daher folgt nach dem Fundamentalsatz der Algebra $p(x) - q(x) \equiv 0$.

Zur Existenz: Wir wählen die so genannten Lagrange-Polynome L_i zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, welche den Grad n besitzen und folgende Eigenschaft haben:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad i \neq j \\ 1, & \text{falls} \quad i = j. \end{cases} \tag{3.1}$$

Im Grunde lösen wir also zunächst $n+1$ einfache Interpolationsprobleme der Form (3.1). Wir setzen dann

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Offenbar gilt:

$$L_i(x) = \frac{\overbrace{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}^{\text{“}ProduktderNullstellen''}}{\underbrace{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}_{\text{“Normierungsfaktor''}}}$$

Satz 16. *(Lagrangsche Interpolationsformel) Zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$ mit paarweisen verschiedenen Stützstellen x_i existiert genau ein Interpolationspolynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, welches gegeben ist durch*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x), \tag{3.2}$$

wobei $L_i(x)$ die Lagrange-Polynom der Stützstellen x_i sind:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bemerkung 15. *Interpretieren wir $P_n := \{p \text{ Polynom} | \deg p \leq n\}$ als Vektorraum, so sind die Lagrange-Polynome L_i bezüglich des Skalarprodukts*

$$< p, q > := \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$$

eine Orthonormalbasis und (3.2) eine entsprechende Linearkombination.

3.1.1 Kondition des Problems

Frage: Wie wirken sich Störungen der Eingabegrößen (hier die Stützwerte f_i) auf die Lösungen der Interpolation aus?

Gegeben: Stützpunkte (x_i, f_i) und gestörte Stützpunkte $(x_i, \bar{f}_i)$.

Wissen:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \\ \bar{p}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_i L_i(x). \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} |p(x) - \bar{p}(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n} |f_i - \bar{f}_i||L_i(x)| \\ &\leq \max_{i=0,\ldots,n} |f_i - \bar{f}_i| \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definition 8. *Wir nennen*

$$\Lambda_n := \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$$

die Lebesgue-Konstante bezüglich der Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ auf dem Intervall $[a, b]$.

Es gilt also:

Satz 17. *Seien $p(x)$ und $\tilde{p}(x)$ die Interpolationspolynome zu den Stützpunkten (x_i, f_i) bzw. $(x_i, \tilde{f}_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt:*

$$\max_{x\in[a,b]} |p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \Lambda_n \cdot \max_{i=0,\ldots,n} |f_i - \tilde{f}_i|,$$

wobei Λ_n die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

Bemerkung 16. *Die Lebesgue-Konstante ist invariant unter affinen Transformationen und daher nur von der relativen Lage der Stützstellen x_i zueinander abhängig.*

Beispiel 15. *Auf dem Intervall $[-1, 1]$ wählen wir*
a) äquidistante Stützstellen $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$

b) Tschebyscheff-Stützstellen $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$

n	a) Λ_n	b) Λ_n
5	≈ 3.10	≈ 2.1
10	≈ 29.9	≈ 2.5
15	≈ 512	≈ 2.7
20	≈ 10987	≈ 2.9

Vorsicht bei Interpolationspolynomen hohen Grades!

Den folgenden beiden Abschnitten liegt die Idee zugrunde, das volle Interpolationsproblem mit $n + 1$ Stützpunkten schrittweise aus den Lösungen für weniger Stützpunkte aufzubauen.

3.1.2 Der Algorithmus von Neville-Aitken

Sind wir tatsächlich nur an einem Wert $p(x^*)$ des Interpolationspolynoms interessiert, so brauchen wir $p(x)$ nicht explizit kennen, sondern berechnen $p(x^*)$ rekursiv. Grundlage für diese rekursive Berechnung bildet das folgende Resultat.

Lemma 3. *(Aitken) Für das Interpolationspolynom $p = p(f|x_0, \dots, x_n)$ von f in den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ gilt die Rekursionsformel*

$$p(x) = \frac{(x_0 - x)p(f|x_1, \dots, x_n) - (x_n - x)p(f|x_0, \dots, x_{n-1})}{x_0 - x_n}, \tag{3.4}$$

wobei $p(f|x_1, \dots, x_n)$ und $p(f|x_0, \dots, x_{n-1})$ die Interpolationspolynome von f in den Stützstellen $x_1, \dots, x_n$ bzw. $x_0, \dots, x_{n-1}$ sind.

Beweis: Setze $q(x) :=$r.S. von (3.4). Dann gilt offenbar $q(x_i) = f_i$ für $i = 0, \dots, n$ und $\deg(q) \leq n$, also $p = q$.

□

Die Interpolationspolynome für nur einen Stützpunkt sind die konstanten Polynome

$$p(f|x_i) = f_i \text{ für } i = 0, \dots, n.$$

Mit der vereinfachenden Notation

$$T_{ik} := p(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x^*),\ i \geq k$$

für ein festes x^* lässt sich der Funktionswert

$$p(x^*) = p(f|x_0, \dots, x_n)(x^*) = T_{nn}$$

gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} T_{i0} &:= f_i \text{ für } i = 0, \dots, n \\ T_{ik} &= T_{i,k-1} + \frac{x^* - x_i}{x_i - x_{i-k}}(T_{i.k-1} - T_{i-1,k-1}) \text{ für } i \geq k \end{aligned}$$

berechnen. Diese Berechnung lässt sich durch das Schema von Neville darstellen:

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
x_0 & f_0 & = & T_{00} & & & & & & & & \\
 & & & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 & f_1 & = & T_{10} & \to & T_{11} & & & & & & \\
 & & & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 & f_2 & = & T_{20} & \to & T_{21} & \to & T_{22} & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & \\
 & & & & \searrow & & & & \searrow & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & = & T_{n-1,0} & \to & T_{n-1,1} & \to & \dots & \to & T_{n-1,n-1} & & \\
 & & & & \searrow & & & & & & \searrow & \\
x_n & f_n & = & T_{n0} & \to & T_{n1} & \to & \dots & \to & T_{n,n-1} & \to & T_{nn}
\end{array}$$