

6. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 15:

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch

$$\kappa(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}.$$

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition κ_2 gilt:

- (1) $\kappa_2(A) = \kappa_2(R) = \kappa_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1, \dots, n} |r_{ii}|}{\min_{k=1, \dots, n} |r_{kk}|}$
- (2) $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$

Aufgabe 16:

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

- (1) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- (2) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.

Aufgabe 17 (Cholesky-Zerlegung):

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A berechnen.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.