Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 12. 5. 2010

5. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 13 (Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

(1) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tritt bei Durchführung der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl Gleichheit in der Abschätzung

$$\rho_n(A) = \frac{\alpha_{max}}{\max\limits_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2^{n-1}$$

auf.

(2) Zeigen Sie: $\rho_n(A) \leq n$, falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix ist. Fakultativ: wie lässt sich die Matrix A aus Teilaufgabe (1) modifizieren, so dass Gleichheit $\rho_n(A) = n$ gilt?

Aufgabe 14 (Eigenschaften symmetrischer, positiv definiter Matrizen):

Zeigen Sie, dass für jede symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

(1) A ist invertierbar.
(2) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.
(3) Die Eigenwerte von A sind positiv.
(4)

$$\max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}| = \max_{i=1,\ldots,n} |a_{ii}|.$$

Interpretieren Sie das Resultat im Zusammenhang mit der Spaltenpivotwahl.

Aufgabe P1 (Programmieraufgabe: Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

Implementieren Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotwahl, indem Sie folgende Teilaufgaben lösen:

(1) LR-Zerlegung (zunächst ohne, dann mit Spaltenpivotwahl),
(2) Vorwärtssubstitution: $Lc = b \in \mathbb{R}^n$ mit unterer (unipotenter) Dreiecksmatrix L (Aufgabe 1),
(3) Rückwärtssubstitution: $Rx = c \in \mathbb{R}^n$ mit oberer Dreiecksmatrix R.

Das Programm soll die folgenden Eigenschaften haben:

a) Falls die Matrix A singulär ist, so bricht das Programm mit einer entsprechenden Fehlermeldung ab.
b) Die Speicherung der Matrizen L und R erfolgt im Array der Matrix A, indem die Elemente von A geeignet überschrieben werden.

c) Die Zeilenvertauschungen, welche durch die Spaltenpivotsuche generiert werden, sind durch einem n-dimensionalen Vektor repräsentiert.
d) Für Matrizen mit Hessenberg-Struktur werden keine unnötigen Operationen durchgeführt. Die Eigenschaft der Hessenberg-Struktur wird dem Programm vom User mitgeteilt, braucht also im Programm nicht getestet werden.
e) Für symmetrisch positiv definite Matrizen wird die Cholesky-Zerlegung berechnet. Die Eigenschaft der Symmetrie und der positiven Definitheit wird dem Programm vom User mitgeteilt, braucht also im Programm nicht getestet werden.
f) Neben dem Lösungsvektor wird auch der Wert $\rho_n(A)$ berechnet und ausgegeben. (siehe Definition in der Vorlesung)

Testen Sie Ihr Programm an verschiedenen Beispielsystemen $Ax = b$, und verifizieren Sie die Angaben der Vorlesung zu $\rho_n(A)$ für Hessenberg-Matrizen und symmetrisch positiv definite Matrizen.

Allgemeine Hinweise:

(1) Abgabe des Programms bis zum 02. 06. 2010;
(2) Präsentation des Programms und der Ergebnisse in einem Vortrag am 09. 06. 2010 in der Übungsgruppe;
(3) Der Quellcode muss leicht nachvollziehbar sein, d.h. er muss übersichtlich und gut kommentiert sein;
(4) Die Wahl der Programmiersprache ist in Absprache mit dem Tutor zu treffen.
(5) Die Programmieraufgabe kann in Zusammenarbeit von maximal 3 Personen erfolgen.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.