

#### 4. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

##### Aufgabe 10 (Stabilität der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

Spaltenpivotwahl: Bei der Spaltenpivotwahl wird das betragsmäßig größte Element der Restspalte als Pivotelement gewählt, d.h. beim  $k$ -ten Eliminationsschritt  $A^{(k-1)} \rightarrow A^{(k)}$  wird  $a_{jk}^{(k-1)}$  mit

$$|a_{jk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

als Pivotelement gewählt.

- (1) Zeigen Sie, dass bei der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl

$$|l_{ij}| \leq 1$$

für die Einträge der Matrix  $L$  gilt.

- (2) Zeigen Sie, dass die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl einer oberen Hessenberg-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die Hessenberg-Struktur in den Restmatrizen erhält.

##### Aufgabe 11 (Kondition und Stabilität der Addition von n Zahlen):

Wir betrachten  $S(x) := \sum_{i=1}^n x_i$  und bezeichnen mit  $\widehat{S}(x)$  die Gleitpunktrealisierung dieser Operation, welche die Zahlen der Reihe nach aufaddiert.

- (1) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems bezüglich der Betragssummennorm, d.h. die minimale Zahl  $\kappa_1$  mit

$$\frac{|S(x) - S(\bar{x})|}{|S(x)|} \leq \kappa_1 \frac{\|x - \bar{x}\|_1}{\|x\|_1}.$$

- (2) Weisen Sie die Stabilität im Sinne der Vorwärtsanalyse von  $\widehat{S}(x)$  nach, d.h. für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  aus Gleitpunktzahlen gilt:

$$\frac{|S(x) - \widehat{S}(x)|}{|S(x)|} \leq (n-1)\kappa_1 \cdot eps + \mathcal{O}(eps^2).$$

##### Aufgabe 12:

Seien  $A$  und  $T$  ( $n \times n$ )-Matrizen und  $T$  invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der  $T^{-1}AT$  in  $\frac{7}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$  Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus  $T^{-1}AT$  für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.**