

3. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 7 (Vermeidbare Auslöschung):

Die Subtraktion zweier annähernd gleicher Zahlen führt zur Stellenauslöschung, wodurch Eingabefehler verstärkt werden. Dieses Problem ist somit schlecht konditioniert. Wann immer es daher möglich ist, sollte man die Subtraktion zweier annähernd gleicher Zahlen vermeiden.

Wir betrachten eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px + q = 0,$$

die eine Nullstelle in der Nähe von Null besitzt. Es tritt somit Stellenauslöschung bei folgender Berechnung der Nullstellen auf.

$$x_{1/2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Geben Sie eine auslöschungsfreie Formel der Nullstellen an, indem Sie ausnutzen, dass q das Produkt der Nullstellen ist (Satz von Vieta).

Aufgabe 8 (Fehlerfortpflanzung):

Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\frac{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi_i(x, y)}{\varphi_i(x, y)}$$

der Operationen

$$\varphi_1(x, y) = x + y$$

$$\varphi_2(x, y) = x \cdot y$$

mit den gestörten Eingabedaten

$$\bar{x} = x(1 + \varepsilon_x)$$

$$\bar{y} = y(1 + \varepsilon_y).$$

Wie werden die Eingabefehler ε_x und ε_y verstärkt? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in Aufgabe 7 beschriebenen Phänomen der Auslöschung.

Aufgabe 9:

Schreiben Sie ein Programm, das die Näherungswerte $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx e^x$ berechnet (und sinnvollerweise plottet)

für $x = -5,5$ und $n = 1, 2, \dots, 30$. Die Berechnung soll auf folgende drei Arten erfolgen:

- (1) mittels obiger Formel
- (2) mit der Umformung $e^{-5,5} = 1/e^{5,5}$ und obiger Formel
- (3) mit der Umformung $e^{-5,5} = (e^{-0,5})^{11}$ und obiger Formel

Erklären Sie die beobachteten Effekte.

Hinweis: In Matlab und octave wird die Darstellung der Zahlenwerte in erhöhter Genauigkeit mit den Befehl `format long` eingeschaltet.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde. Die Übungen finden mittwochs 15–17 (Raum D4A19 und C9G09), 17–19 (Raum C9A03) Uhr statt. Informationen zu den Übungen erhalten Sie unter http://na.uni-tuebingen.de/ex/numinf_ss10/.