

2. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 4 (Zugehörige Matrixnorm):

Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ Normen auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|}$$

eine Norm auf dem Raum der reellen $(m \times n)$ -Matrizen definiert ist. Zeigen Sie zudem $\|I\| = 1$ und

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$$

bei geeigneter Größe der Matrizen A und B .

Aufgabe 5 (Eigenschaften der Konditionszahl):

Zeigen Sie, dass für die Konditionszahl einer Matrix gilt:

- (1) $\text{cond}(A) \geq 1$ und $\text{cond}(a) = 1$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (2) $\text{cond}(A) = \text{cond}(\alpha A)$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (3) $\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}$.

Durch Eigenschaft (3) lässt sich die Konditionszahl auf nichtquadratische Matrizen erweitern.

Aufgabe 6 (Störung der rechten Seite):

Wir betrachten $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

und gestörter rechten Seite

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 + \varepsilon \\ 4 - 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

wie im Beispiel der Vorlesung. Untersuchen Sie die Optimalität der Abschätzungen, welche in der Vorlesung für die absolute und relative Abweichung der Lösung hergeleitet wurden. Konstruieren Sie zu der oben angegebenen Matrix A eine rechte Seite b und eine gestörte rechte Seite \bar{b} , so dass bei beiden Abschätzungen Gleichheit gilt.

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde. Die Übungen finden mittwochs 15–17 (Raum D4A19 und C9G09), 17–19 (Raum C9A03) Uhr statt. Informationen zu den Übungen erhalten Sie unter http://na.uni-tuebingen.de/ex/numinf_ss10/.