

Aufgabe 1:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -41 \\ -15 \end{pmatrix}$$

durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl.

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine tridiagonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & * & \\ & & & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl die tridiagonale Struktur in den (niedriger dimensional) Restmatrizen erhält und

$$\rho_n(A) := \frac{\alpha_{\max}}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2$$

gilt. Dabei ist α_{\max} der betraglich größte Wert der Elemente von A und den auftretenden Restmatrizen. Die erste Restmatrix R_1 entsteht durch das Streichen der ersten Spalte und Zeile nach der Elimination von x_1 :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

(i) Gegeben seien gestörte Eingabedaten

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(1 + \varepsilon_x), & |\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| &\leq \text{eps}. \\ \bar{y} &= y(1 + \varepsilon_y), \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, wie sich diese Störungen bei der Division

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y}$$

fortpflanzen, indem Sie den relativen Fehler betrachten.

(ii) Gegeben seien die beiden äquivalenten Formeln zur Berechnung der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ f(x) &= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned} \quad x \geq 1.$$

Welche Formel würden Sie bei einer Implementierung verwenden? Geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Stützpunkte

f_i	20	5	5	-10
x_i	-2	-1	1	4

für $i = 0, 1, 2, 3$.

- (i) Berechnen Sie mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die Stützpunkte in Monomdarstellung.
- (ii) Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms, indem Sie die dividier-ten Differenzen berechnen.

Aufgabe 5:

Gegeben seien Quadraturformeln mit $s = 3$ und Knoten $0 = c_1 < c_2, c_3$. Bestimmen Sie die Familie von Formeln mit Ordnung ≥ 4 . Schreiben Sie dazu ein Programm in Pseudo-Code, welches zu vorgegebenem c_2 den Knoten c_3 und die Gewichte b_i möglichst effizient berechnet.

Wieviele symmetrische Quadraturformeln finden Sie in dieser Familie? Begründen Sie Ihre Antwort.