

10. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Programmierprojekt 2 (Interpolation und Approximation) :

Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der dividierten Differenzen zu vorgegebenen Stützpunkten (x_i, f_i) mit paarweise verschiedenen x_i . Realisieren Sie zudem die Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung durch das Horner-Schema.

Testen Sie Ihr Programm mit den Daten

$$x_k = \frac{10k}{n} - 5, \quad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \dots, n$$
$$x_k = 5 \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \dots, n$$

für $n = 4, 6, 8, 10$. Plotten Sie die Interpolationspolynome jeweils im Intervall $[-5, 5]$. Interpretieren Sie das Ergebnis. Berechnen Sie zudem die Lebesgue-Konstante Λ_n für die oben angegebenen Stützwerte wiederum für $n = 4, 6, 8, 10$. Plotten Sie ebenfalls die Lagrange-Polynome.

Werten Sie das Interpolationspolynom an einigen Stellen aus, wobei Sie die Stützpunkte permutieren, d.h. umindizieren. Welche Beobachtung bezüglich der Funktionswerte machen Sie?

Studieren Sie die Interpolation durch natürliche Splinefunktionen, wobei die Splinefunktion aus kubischen Splines zusammengesetzt sei (z.B. Stoer: Numerische Mathematik 1, Springer, 2002⁸ (1. korrigierter Nachdruck), S. 101–110).

Implementieren Sie den Algorithmus zur Interpolation durch natürliche kubische Splinefunktionen, indem Sie die folgenden Teilprobleme lösen:

- (1) Berechnung der Momente M_j , d.h. die 2. Ableitungen der Splines.
- (2) Berechnung der Koeffizienten der kubischen Splines (mit Hilfe der Momente).
- (3) Auswertung der Splines durch das Horner-Schema.

Für gegebene Stützpunkte (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, n$, müssen die Momente und Koeffizienten nur einmal ausgerechnet werden. Danach ist die Auswertung an mehreren Stellen x möglich.

Testen Sie das Programm ebenfalls mit den Daten

$$x_k = \frac{10k}{n} - 5, \quad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Resultaten der Polynominterpolation.

Allgemeine Hinweise:

- (1) Abgabe des Programms bis zum 15. 07. 2009;
- (2) Präsentation des Programms und der Ergebnisse in einem Vortrag am 20. bzw. 22. 07. 2009 in der Übungsgruppe;
- (3) Der Quellcode muss leicht nachvollziehbar sein, d.h. er muss übersichtlich und gut kommentiert sein;
- (4) Die Wahl der Programmiersprache ist in Absprache mit dem Tutor zu treffen.