

#### 4. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

##### Aufgabe 10 (Stabilität der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl):

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \cdot 10^{-1} \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ b \end{pmatrix}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren in zweistelliger Gleitpunkt-Arithmetik mit Spaltenpivotwahl. Bei welchen ungünstigen Werten von  $a, b$  kommt es zu den in der Vorlesung beschriebenen Instabilitäten? (Qualitative Angabe genügt.)

##### Aufgabe 11 (Kondition und Stabilität der Addition von $n$ Zahlen):

Wir betrachten  $S(x) := \sum_{i=1}^n x_i$  und bezeichnen mit  $\widehat{S}(x)$  die Gleitpunktrealisierung dieser Operation, welche die Zahlen der Reihe nach aufaddiert.

- (1) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems bezüglich der Betragssummennorm, d.h. die minimale Zahl  $\kappa_1$  mit

$$\frac{|S(x) - S(\bar{x})|}{|S(x)|} \leq \kappa_1 \frac{\|x - \bar{x}\|_1}{\|x\|_1}.$$

- (2) Weisen Sie die Stabilität im Sinne der Vorwärtsanalyse von  $\widehat{S}(x)$  nach, d.h. für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  aus Gleitpunktzahlen gilt:

$$\frac{|S(x) - \widehat{S}(x)|}{|S(x)|} \leq (n-1)\kappa_1 \cdot eps + \mathcal{O}(eps^2).$$

- (3) Geben Sie kurz an, wie sich die Stabilität im Sinne der Rückwärtsanalyse von  $\widehat{S}(x)$  durch das Beispiel 9 der Vorlesung begründen lässt.

##### Aufgabe 12:

Schreiben Sie ein Programm, das die Näherungswerte  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx e^x$  berechnet (und sinnvollerweise plottet) für  $x = -5, 5$  und  $n = 1, 2, \dots, 30$ . Die Berechnung soll auf folgende drei Arten erfolgen:

- (1) mittels obiger Formel
- (2) mit der Umformung  $e^{-5,5} = 1/e^{5,5}$  und obiger Formel
- (3) mit der Umformung  $e^{-5,5} = (e^{-0,5})^{11}$  und obiger Formel

Erklären Sie die beobachteten Effekte.

Hinweis: In Matlab und octave wird die Darstellung der Zahlenwerte in erhöhter Genauigkeit mit den Befehl `format long` eingeschaltet.

**Besprechung und Abgabe der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.**