EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 21.06.2019**

Übungsaufgaben 9

Problem 1. Die Lagrange Finite-Elemente Ansätze $(\widehat{T}, \widehat{P}, \widehat{K})$ und (T, P, K) seien parametrisch unter der affinen Abbildung $\chi : \widehat{T} \to T$, also

$$P = \{\widehat{u} \circ \chi^{-1} : \ \widehat{u} \in \widehat{P}\} \qquad \text{und} \qquad K = \{\chi(\xi) : \ \chi \in \widehat{K}\}.$$

Wir bezeichnen mit $I_T : C(T) \to P$ und $\widehat{I} : C(\widehat{T}) \to \widehat{P}$ zugehörige Interpolationsoperatoren. Zeigen Sie, daß $\widehat{I_T u} = \widehat{I}\widehat{u}$.

Problem 2. a) In der Vorlesung haben wir folgende Abschätzungen für $p = 2$ gezeigt:

(i) $\|D^m \hat{u}\|_{\mathbb{L}^p(T)} \leq \frac{|\boldsymbol{B}|^m}{\sqrt{\det \boldsymbol{B}}} \|D^m u\|_{\mathbb{L}^p(T)}$,

(ii) $\|D^m u\|_{\mathbb{L}^p(T)} \leq |\boldsymbol{B}^{-1}|^m \sqrt{\det \boldsymbol{B}} \|D^m \hat{u}\|_{\mathbb{L}^p(T)}$.

Gelten diese Abschätzungen für sämtliche $1 \leq p \leq \infty$?

b) Sei $p = 2$. In der Vorlesung haben wir die *inverse Abschätzung* kennengelernt, wonach eine Konstante $C > 0$ existiert, sodaß

$$\|u_h\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\mathcal{O})} \leq \frac{C}{h} \|u_h\|_{\mathbb{L}^p} \qquad \forall\, u_h \in \mathbb{U}_h \subset \mathbb{H}^1(\mathcal{O})\,.$$

Gilt diese Abschätzung für sämtliche $1 \leq p \leq \infty$?

Problem 3. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sowie $\vec{\beta} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, sodaß $\mathrm{div}\vec{\beta} \equiv 0$. Wir wollen folgendes Problem (lösbare) approximieren: Finde $u \in \mathbb{H}^1_0 \cap \mathbb{H}^2$, sodaß

$$-\Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u + u = f \quad \text{auf } \mathcal{O}\,.$$

Hierzu verwenden wir einen konformen affinen FE-Ansatz (auf regulärer Triangulierung von $\mathcal{O}$) mit Lösung $u_h \in \mathbb{U}_h \subset \mathbb{H}^1_0$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodaß

$$\|\nabla[u - u_h]\|^2_{\mathbb{H}^1} \leq Ch\|u\|_{\mathbb{H}^2}\,. \tag{1}$$

Bemerkung: Z.B. im Buch von C. Evans: *Partial differential equations* finde Sie die weitere Abschätzung

$$\|u\|_{\mathbb{H}^2} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}^2},$$

mit $C > 0$ abhängig von den Daten $\mathcal{O}$, $\vec{\beta}$, sodaß hiermit eine Abschätzung der rechten Seite von (1) allein durch Daten möglich ist.

Abgabe: 27.06.2019.