EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 07.06.2019**

Übungsaufgaben 8

Problem 1. In der Vorlesung haben wir den Finite-Elemente Ansatz $\big(T, P(T), K(T)\big)$, mit T Rechteck in $\mathbb{R}^2$, $P(T) = Q_1$, und $K(T) = \{\chi_i(p) = p(a_i);\, 1 \leq i \leq 4\}$ kennengelernt.

Zeigen Sie, daß der zugehörige FE-Raum

$$\mathbb{V}_h^{(1)} := \big\{u_h \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}) : \, u_h\big|_T \in Q_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \; u_h \text{ stetig in Eckpunkten}\big\}$$

$\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$-konform ist.

Problem 2. Seien T Rechteck, $P(T) = \mathrm{span}\{1, x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2\}$, und $K(T) = \{\chi_i(p) = p(m_i),\; 1 \leq i \leq 4\}$, wobei m_i eine Seitenmitte bezeichnen. Zeigen Sie Unisolvenz für diesen Finite-Elemente Ansatz.

Problem 3. Sei $\mathcal{O} = (-1, 1)$. Es bezeichne $\mathcal{P}_k(\overline{\mathcal{O}})$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq k$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $C > 0$, sodaß

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k(\overline{\mathcal{O}})} \|u - p\|_{C(\overline{\mathcal{O}})} \leq C\, \|u^{(k+1)}\|_{C(\overline{\mathcal{O}})} \qquad \forall\, u \in C^\infty(\overline{\mathcal{O}})\,.$$

Abgabe: 13.06.2019.