EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 31.05.2019**

Übungsaufgaben 7

Problem 1. In **Problem 2.** auf **Übungsblatt 5** haben wir die lineare Wärmeleitungsgleichung (2) kennengelernt, für die das *parabolische Maximumsprinzip* gilt. Um dieses zu formulieren, führen wir folgende Notationen ein:

- $\mathcal{O}_T := (0,T] \times \mathcal{O}$ und $\Gamma_T := \overline{\mathcal{O}_T} \setminus \mathcal{O}_T$.

In dem Buch [L.C. Evans, *"Partial Differential Equations", p. 54f.*] wird dann gezeigt: Falls eine klassische Lösung $u : \overline{\mathcal{O}_T} \to \mathbb{R}$ von (2) existiert, gilt:

$$\max_{(t,\mathbf{x})\in\overline{\mathcal{O}_T}} u(t,\mathbf{x}) = \max_{(t,\mathbf{x})\in\Gamma_T} u(t,\mathbf{x})\,.$$

i) Sei $u_0 \leq 0$. Überlegen Sie, ob das Verfahren i) aus **Problem 2.** auf **Übungsblatt 5** das *elliptische Maximumsprinzip* erfüllt.

ii) Erfüllt die FE-Diskretisierung dieses Verfahrens das *diskrete Maximumsprinzip*? Was ist hierbei das Problem?

iii) Eine Modifikation der FE-Diskretisierung in (ii) lautet wie folgt: Sei $1 \leq \ell \leq L$: Finde $u_h^\ell \in \mathbb{U}_h^{(1)}$, sodaß
$$\frac{1}{k}(u_h^\ell, v_h)_h + (\nabla u_h^\ell, \nabla v_h) = \frac{1}{k}(u_h^{\ell-1}, v_h)_h \qquad \forall\, v_h \in \mathbb{U}_h^{(1)}\,, \tag{1}$$
wobei $(u_h, v_h)_h := \int_{\mathcal{O}} \mathcal{I}_h(u_h \cdot v_h)(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, mit der Lagrange-Interpolation $\mathcal{I}_h$. Für dieses Verfahren kann man insbesondere optimale Konvergenz nachweisen.

Bemerkung: Der in iii) verwendete Ansatz ist in der Literatur als *'mass lumping'* bekannt.

Problem 2. Auf $\mathcal{O} = (0,1)^2$ betrachten wir das Problem: Finde $u : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,.$$

Wir verwenden die Triangulierung aus **Problem 2** auf **Übungsblatt 2**, die insbesondere vier freie Knoten verwendet. In der Vorlesung wurde der 5-Punkte Operator $\Delta_h^{(5)}$ eingeführt, mit dessen Hilfe wir auf folgendes LGS geführt werden,

$$\boldsymbol{A}^{\text{FD}}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}^{\text{FD}}\,, \qquad \text{wobei } \mathbf{b}^{\text{FD}} = (b_1,\ldots,b_4)^\top, \text{und } b_i^{\text{FD}} = f(\mathbf{x}_i)\,. \tag{2}$$

Wir sehen, daß die rechte Seite anders ist als die des LGS, das via FEM generiert worden wäre. Stellen Sie $\boldsymbol{A}^{\text{FD}} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ auf. Welche 'Korrespondenzen' des hier via Finite-Differenzen-Ansatz erstellten LGS (2) und des LGS via FEM stellen Sie fest?

Abgabe: 06.06.2019.