EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 24.05.2019**

Übungsaufgaben 6

Problem 1. In **Problem 2., ii)** auf **Übungsblatt 5** haben wir das implizite Euler-Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung der linearen Wärmeleitungsgleichung untersucht. Gesucht ist eine Abschätzung für den Fehler

$$\max_{1\leq \ell\leq L} \|u^\ell - u_h^\ell\|_{\mathbb{L}^2}^2 + k\sum_{\ell=1}^{L} \|\nabla[u^\ell - u_h^\ell\|_{\mathbb{L}^2}^2\,,$$

wobei $\{u_h^\ell\}_{\ell=1}^L \subset \mathbb{V}_h$ Lösung seiner FE-Diskretisierung ist, mit $u_h^0 = \mathcal{I}_h u^0$. Diese Abschätzung sollte widerspiegeln, daß der Fehler für $h\downarrow 0$ verschwindet.

Hinweis: Verwenden Sie die Lagrange-Interpolation $\mathcal{I}_h : C(\overline{\mathcal{O}}) \to \mathbb{V}_h$ – deren Definition uns zumindest für beschränkte Gebiete $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ bekannt ist. Sie können daher $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ annehmen.

Problem 2. Sei $T>0$, sei $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, und $(u_0,u_1)\in\mathbb{H}_0^1(\mathcal{O})\times\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. Eine Anfangs-Randwertaufgabe für die lineare Wellengleichung sucht eine Lösung $u:[0,T]\times\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T)\times\mathcal{O}\,,\\ u = 0 & \text{auf } (0,T)\times\partial\mathcal{O}\,,\\ u(0,\cdot)=u_0 \quad u_t(0,\cdot)=u_1 & \text{auf } \mathcal{O}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Der Existenznachweis einer Lösung für dieses Problem ist mit dem (verallgemeinerten) Lax-Milgram-Lemma nicht unmittelbar zu führen und verwendet andere Konzepte. Die Einführung einer Hilfsvariablen $v\equiv\partial_t u$ für alle $(t,x)\in(0,T)\times\mathcal{O}$ führt $(1)_1$ über in:

$$\partial_t v - \Delta u = 0 \quad \text{auf } (0,T)\times\mathcal{O}\,.$$

Wir betrachten hier eine Approximation von (1) – eine Diskretisierung in der Zeit: hierzu

i) führen wir eine äquidistante Partitionierung $I_k := \{t_\ell\}_{\ell=0}^L$ von $[0,T]$ mit Gitterweite $k>0$ ein, wobei $t_\ell = \ell k$ und $t_L \leq T$, und

ii) suchen dann eine Folge $\{(u^\ell,v^\ell)\}_{\ell=1}^L$ von Abbildungen $u^\ell, v^\ell : \overline{\mathcal{O}}\to\mathbb{R}$, sodaß jeweils

$$\begin{aligned} \frac{u^\ell-u^{\ell-1}}{k} &= v^\ell && \text{in } \mathcal{O}\,,\\ \frac{v^\ell-v^{\ell-1}}{k} - \frac{1}{2}\Delta[u^\ell+u^{\ell-1}] &= 0 && \text{in } \mathcal{O}\,,\\ u^\ell = v^\ell &= 0 && \text{auf } \partial\mathcal{O}\,,\\ u^0\equiv u_0 \quad &\text{und} \quad v^0\equiv v_0\,. \end{aligned}$$

Geben Sie eine schwache Formulierung des Problems an und diskutieren Sie seine Lösbarkeit, sowie eine FE-Umsetzung dieser Zeitdiskretisierung mit Lösung $\{(u^\ell, v^\ell)\}_{\ell=1}^L$. Verifizieren Sie die Abschätzung

$$\max_{1 \leq \ell \leq L} \big(\|v_h^\ell\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u_h^\ell\|_{\mathbb{L}^2}^2 \big) \leq C \big(\|v_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \big) \,.$$

Problem 3. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Betrachte den FE-Raum

$$\mathbb{U}_h := \big\{ u_h \in C(\overline{\mathcal{O}}) : \, u_h\big|_K \in \mathcal{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \big\} \,,$$

wobei $\mathcal{T}_h$ eine *struktur-reguläre* Triangulierung von $\mathcal{O}$ ist, und $\mathcal{P}_1(K)$ den Vektorraum der Polynome vom Grad 1 bezeichnet. Zeigen Sie, daß $\mathbb{U}_h \subset \mathbb{H}^1(\mathcal{O})$.

Hinweis: Untersuchen Sie die schwache Ableitbarkeit jedes $u_h \in \mathbb{U}_h$, indem Sie hierzu elementweise vorgehen.

Abgabe: 30.05.2019.