EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 17.05.2019**

Übungsaufgaben 5

Problem 1. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Gesucht ist eine Lösung $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ von

$$-\Delta u + [\vec{\beta} \cdot \nabla] u = f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,, \tag{1}$$

mit gegebenen $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ und $\vec{\beta} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$.

a) Formulieren Sie möglichst allgemein Bedingungen an auftretende Abbildungen $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ und $\vec{\beta} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$, die die Existenz einer schwachen Lösung von (1) sicherstellen.

b) Sei $\mathcal{O} = (0,1)^2$, $\vec{\beta} \equiv 1$, und verwenden Sie das Gitter $\mathcal{T}_h$ und den 'Set-up' aus **Problem 2** auf **Übungsblatt 2**. Wie lautet das zugehörige LGS? Diskutieren Sie (wieder) die Eigenschaften der auftretenden Steifigkeitsmatrix?

Problem 2. Sei $T > 0$, sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, und $u_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. Eine Anfangs-Randwertaufgabe für die lineare Wärmeleitungsgleichung sucht eine Lösung $u : [0,T] \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{auf } (0,T) \times \mathcal{O}\,, \\ u = 0 & \text{auf } (0,T) \times \partial\mathcal{O}\,, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{auf } \mathcal{O}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Der Existenznachweis einer Lösung für dieses Problem ist mit dem (verallgemeinerten) Lax-Milgram-Lemma nicht unmittelbar zu führen und verwendet andere Konzepte.

Wir betrachten hier eine Approximation von (2) – das *implizite Euler-Verfahren*: hierzu

i) führen wir eine äquidistante Partitionierung $I_k := \{t_\ell\}_{\ell=0}^L$ von $[0,T]$ mit Gitterweite $k > 0$ ein, wobei $t_\ell = \ell k$ und $t_L \le T$, und

ii) suchen dann eine endliche Folge $\{u^\ell\}_{\ell=1}^L$ von Abbildungen $u^\ell : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$, sodaß jeweils

$$\frac{u^\ell - u^{\ell-1}}{k} - \Delta u^\ell = 0 \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u^\ell = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,, \qquad \text{mit } u^0 \equiv u_0\,.$$

a) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des *impliziten Euler-Verfahrens*, sowie die FE-Umsetzung dieser Zeitdiskretisierung. Verifizieren Sie die Abschätzung

$$k \sum_{\ell=1}^L \Big\| \frac{u^\ell - u^{\ell-1}}{k} \Big\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \max_{1 \le \ell \le L} \|\nabla u^\ell\|_{\mathbb{L}^2}^2 \le \|\nabla u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2\,.$$

b) Eine (genauere) Approximation von (2) liefert das *Crank-Nicholson-Verfahren*, bei dem anstelle von ii)

$$\frac{u^\ell - u^{\ell-1}}{k} - \frac{1}{2}\Delta[u^\ell + u^{\ell-1}] = 0 \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u^\ell = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,, \qquad \text{mit } u^0 \equiv u_0$$

tritt. Diskutieren Sie Ihre Resultate aus *a)* in diesem Kontext.

c) Wie ändern sich Ihre Resultate in *a)* und *b)*, wenn anstelle der Dirichlet-Randbedingung $(2)_2$ die homogene Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } (0,T) \times \partial\mathcal{O} \qquad \text{verwendet wird?}$$

Hinweis: Beachten Sie in *b)* den Fall: $\ell = 0$: was müssen Sie an u_0 zusätzlich fordern?

Abgabe: 23.05.2019.