EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 10.05.2019**

Übungsaufgaben 4

In **Problem 2** auf *Übungsblatt 3* wurde mit (2) eine *gemischte Form* des Ausgangsproblems (1) – der sog. Balkengleichung – vorgestellt, deren schwache Formulierung lautet: Finde eine Lösung

$$(u,p) \in \mathbb{U} := \big\{(v,q) \in \mathbb{H}^1(0,1) \times \mathbb{H}^1(0,1) : \, v(0) = 0\,, \quad q(1) = 0\big\} \subset \big[\mathbb{H}^1(0,1)\big]^2\,,$$

sodaß

$$a\big((u,p),(v,q)\big) = F\big((v,q)\big) \qquad \forall\,(v,q) \in \mathbb{U}\,, \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned} a\big((u,p),(v,q)\big) \;&:=\; \int_0^1 \{pq + u'q' - p'v'\}\,\mathrm{d}x\,,\\ F\big((v,q)\big) \;&:=\; \int_0^1 fv\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, daß die Abbildung $a : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ nicht koerziv ist – somit das bekannte Lax-Milgram Lemma nicht anwendbar ist. Überzeugen Sie sich davon, daß die Bilinearform nicht symmetrisch ist, denn

$$a\big((u,p),(-v,q)\big) = a\big((v,q),(-u,p)\big) \qquad \forall\,(u,p),(v,q) \in \mathbb{U}\,.$$

Um Lösbarkeit von (1) zeigen zu können, wollen wir das *verallgemeinerte Lax-Milgram Lemma* verwenden – diesen Satz beweisen wir in der Vorlesung:

Satz (verallgemeinertes Lax-Milgram Lemma): Seien $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ zwei Hilberträume. Betrachte zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} a : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R} \qquad &\text{(eine Bilinearform)},\\ F : \mathbb{V} \to \mathbb{R} \qquad &\text{(ein lineares Funktional)}, \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften

i) (Stetigkeit von a und F) Es existieren zwei Konstanten $C_a, M > 0$, sodaß

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \le C\|u\|_{\mathbb{U}}\|v\|_{\mathbb{V}} \qquad &\forall\,(u,v) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V}\,,\\ |F(v)| \le M\|v\|_{\mathbb{V}} \qquad &\forall\,v \in \mathbb{V}\,. \end{aligned}$$

ii) (Koerzivität) Es existiert ein $c_a > 0$, sodaß

$$\sup_{0 \neq v \in \mathbb{V}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{\mathbb{V}}} \ge c_a\|u\|_{\mathbb{U}} \qquad \forall\,u \in \mathbb{U}\,,$$

und es gilt für jedes $0 \neq v \in \mathbb{V}$:

$$\sup_{u \in \mathbb{U}} a(u, v) > 0\,.$$

Dann existiert genau eine Lösung $u \in \mathbb{U}$, sodaß

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{V}\,.$$

Außerdem gilt $\|u\|_{\mathbb{U}} \leq \frac{M}{c_a}$.

Problem 1. Zeigen Sie mithilfe des generalisierten Lax-Milgram Lemmas, daß (1) genau eine Lösung besitzt.

Problem 2. Geben Sie eine FE-Diskretisierung von (1) an und diskutieren Sie, ob diese die Lösbarkeits-Eigenschaft von (1) erbt.

Problem 3. Für die FE-Diskretisierung ist nun eine 'Algebraisierung' möglich, die dazu führt, ein lineares Gleichungssystem zu lösen: in diesem Kontext tritt ein Lösungsvektor auf, dessen Komponenten anteilig Knotenwerte der Komponenten u_h und p_h der FE-Lösung sind. Eine entsprechende Struktur hat die Steifigkeitsmatrix: bitte geben Sie diese an.

Abgabe: 16.05.2019.