EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 03.05.2019**

Übungsaufgaben 3

Problem 1. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Gegeben sei eine Abbildung $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Abbildung $u : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} u'''' &= f \quad \text{auf } \mathcal{O}\,, \\ u(0) = u'(0) &= 0\,, \\ u''(1) = u'''(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Leiten Sie eine schwache Formulierung für das Problem her. Der hierbei verwendete Hilbertraum sollte sein

$$\mathbb{U} = \big\{\varphi \in \mathbb{H}^2(\mathcal{O}) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\big\}\,.$$

Existiert eine Lösung $u \in \mathbb{U}$ von (1)?

Problem 2. Wenn wir eine FE-Formulierung der schwachen Formulierung in **Problem 1** suchen, können wir nicht mehr den bekannten FE-Raum

$$\mathbb{U}_h := \big\{u_h \in C(\overline{\mathcal{O}}) : \; u_h\big|_{(x_{j-1},x_j)} \in \mathcal{P}_1\big((x_{j-1},x_j)\big)\big\}$$

(bei vorliegender Triangulierung $\mathcal{T}_h = \{x_j\}_{j=0}^J$ von $\overline{\mathcal{O}}$) verwenden, da $\mathbb{U}_h \not\subset \mathbb{U}$, wobei letzterer Raum in **Problem 1** verwendet wurde.

Aus diesem Grund wird oft eine alternative Methode verwendet – bekannt in der Literatur als *gemischte Methode* –, die die Lösung u und ihre Ableitung(en) unabhängig voneinander konstruiert/approximiert. Konkret schreiben wir (1) um als: Finde ein *Tupel* $(u,p) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} p - u'' &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \\ p'' &= f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \\ u(0) = u'(0) &= 0\,, \\ p(1) = p'(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Versuchen Sie die Herleitung einer schwachen Formulierung für (2): beachten Sie hierbei, daß als Testfunktionen nun auch ein Tupel (v,q) (aus welchem Hilbertraum?) auftritt.

(ii) Begründen Sie, warum das Lax-Milgram Lemma hierauf nicht anwendbar ist.

(iii) Geben Sie eine FE-Formulierung für die schwache Formulierung aus (i) an.

Bemerkung: In der Vorlesung werden wir in Kürze eine *verallgemeinerte Version des Lemmas von Lax-Milgram* kennenlernen, die eindeutige Lösbarkeit in (i) liefert.

Abgabe: 09.05.2019.