EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 26.04.2019**

Übungsaufgaben 2

Problem 1. Sei $\mathcal{O} = (0,1)^2$, und $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ sei gegeben: Gesucht ist eine Lösung $u : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ der Randwertaufgabe:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,. \tag{1}$$

Notieren Sie die schwache Formulierung des Problems, und diskutieren Sie seine (eindeutige) Lösbarkeit mithilfe des Lax-Milgram Lemmas.

Problem 2. Wir wollen die in **Problem 1.** vorgestellte Aufgabe (1) mit $f \equiv 1$ numerisch mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) lösen. Hierzu verwenden wir ein äquidistantes Gitter $\mathcal{T}_h = \bigcup_i K_i$ der Feinheit $h = \frac{1}{3}$, das $\overline{\mathcal{O}}$ überdeckt: dieses bestehe hier aus 18 kongruenten Dreiecken $K_i \subset \overline{\mathcal{O}}$, wovon jeweils zwei ein Quadrat mit Seitenlänge $\frac{1}{3}$ partitionieren. Zu betrachtende FE-Funktionen $u_h \equiv u_h(x,y)$ sind wieder global stetig, und auf jedem Dreieck affin, also:

$$u_h\big|_{K_i} \in \text{span}\{1, x, y\} \qquad (1 \leq i \leq 18)\,.$$

a) Wie lautet das zugehörige LGS?

b) Lösen Sie dieses LGS, und skizzieren Sie die FE-Lösung.

Abgabe: 02.05.2019.