EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 06.07.2019**

Übungsaufgaben 11

Problem 1. Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. In der Vorlesung haben wir wiederholt, wann f Riemann-Stieltjes-integrierbar bzgl. g heißt.

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (nur) stetig. Zeigen Sie, daß dann die Definition des Integrals $\int_a^b f(s)\, df(s)$ problematisch ist. Betrachten Sie hierzu entlang einer Partitionierung von $[0, T]$ die Summen

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})\big(f(t_j) - f(t_{j-1})\big) \qquad \text{bzw.} \qquad R_n = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\big(f(t_j) - f(t_{j-1})\big)$$

Zeigen Sie, daß i.A. $\lim_{n\uparrow\infty} L_n \neq \lim_{n\uparrow\infty} R_n$. Argumentieren Sie, daß dies genau dann der Fall ist, wenn die quadratische Variation $Q^f(t)$ nicht verschwindet.

b) Sei $f \in C^1([a, b])$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall f Riemann-Stieltjes-integrierbar (bzgl. f) ist.

c) Sei $f \in C^{1/2}([a, b])$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall f nicht Riemann-Stieltjes-integrierbar (bzgl. f) ist

Problem 2. Sei W ein Standard-Wienerprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine (determistische) Stufenfunktion, d.h. es existiert eine Partitionierung von $[a, b]$, sodaß

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_{j-1} \chi_{[t_{j-1}, t_j)}.$$

a) Wir betrachten das *Wiener-Integral*

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}\big(W(t_j) - W(t_{j-1})\big)\,.$$

Zeigen Sie: das Wiener-Integral ist linear und genügt der *Ito-Isometrie*

$$\mathbb{E}\big[\big(I(f)\big)^2\big] = \int_a^b |f(s)|^2 \,\mathrm{d}s\,.$$

b) Benutzen Sie Teil a), um nun das Wiener-Integral für alle $f \in L^2(a, b)$ zu definieren.

Problem 3. Konzeptionell relevant sind spezielle Prozesse – Martingale. Ihre Einführung erfordert das Konzept einer Filtration des W-Raums $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, womit wir hier beginnen:

Eine Familie $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ von Unter-σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ von $\mathcal{F}$ heißt *Filtration* von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wenn sie aufsteigend geordnet ist, also:

$$\text{Für alle } s, t \in [0,T] \text{ mit } s \le t \text{ gilt:} \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Für ein $\{X_t;\, 0 \le t \le T\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt $\{\mathcal{F}_t^X\}_{0\le t\le T}$, mit $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s;\, 0 \le s \le t)$ ***natürliche Filtration***; $\mathcal{F}_t^X$ ist also die kleinste σ-Algebra, bzgl. der X_t jeweils meßbar ist.

Ein $\mathbb{R}$-wertiges *($\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$)-Martingal* auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ ist ein stochastischer Prozeß $X \equiv \{X_t;\, t \ge T\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) X_t ist $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-meßbar für jedes $t \in [0,T]$.

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ gilt für alle $0 \le t \le T$.

(iii) Für alle $s \le t$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Zeigen Sie, daß das Wiener-Integral $\{I_t(f);\, 0 \le t \le T\}$ aus **Problem 2, b)** mit

$$I_t(f) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

ein $\{\mathcal{F}_t^W\}_{0\le t\le T}$-Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist.

Abgabe: 11.07.2019.