EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 28.06.2019**

Übungsaufgaben 10

Problem 1. Dieses Problem ist eine Modifikation von **Problem 3** auf dem letzten Übungsblatt. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sowie $\vec{\beta} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ konstant. Wir wollen die existente Lösung $u \in \mathbb{H}_0^1 \cap \mathbb{H}^2$ des folgenden Problems mithilfe einer linear-konformen FEM approximieren:

$$-\Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u + u = f \quad \text{auf } \mathcal{O}\,.$$

Hierzu verwenden wir einen $\mathbb{H}_0^1$-konformen lineren FE-Ansatz (auf regulärer Triangulierung von $\mathcal{O}$) mit Lösung $u_h \in \mathbb{U}_h \subset \mathbb{H}_0^1$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodaß

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{L}^2} \leq Ch^2 \|u\|_{\mathbb{H}^2}\,. \tag{1}$$

Bemerkung: Verwenden Sie hierzu den Aubin-Nitsche-Trick.

Problem 2. Sei $\mathbb{U}_h^{(1)} = \{v_h \in \mathbb{H}_0^1 : v_h\big|_T \in \mathscr{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathscr{T}_h\}$ der $\mathbb{H}_0^1$-konforme lineare FE-Ansatz auf der Basis einer regulären Triangulierung $\mathscr{T}_h$ des beschränkten Lipschitz-Gebietes $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$.

Wir fixieren ein $T \in \mathscr{T}_h$. Zeigen Sie, daß eine Konstante $C > 0$ unabhängig von h existiert, sodaß

$$\max_{x \in T} |u_h(x)| \leq \frac{C}{|T|} \int_T |u_h(x)| \,\mathrm{d}x \qquad \forall\, u_h \in \mathbb{U}_h^{(1)}\,.$$

Bemerkung: Starten Sie hierzu mit der entsprechenden Ungleichung auf dem Referenzelement (warum gilt nachfolgende Abschätzung hier?)

$$\max_{\xi \in \widehat{T}} |\widehat{u}_h(\xi)| \leq \widehat{C} \int_{\widehat{T}} |\widehat{u}_h(\xi) \,\mathrm{d}\xi \qquad \forall\, \widehat{u}_h \in \mathscr{P}_1(\widehat{T})$$

und argumentieren Sie dann mithilfe der Kettenabbildung für $\widehat{u} = u \circ \chi$.

Abgabe: 04.07.2019.