EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Numerik stationärer Differentialgleichungen

Sommersemester 19 **Tübingen, 18.04.2019**

Übungsaufgaben 1

Problem 1. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen zu $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$ gehören:

$$x \mapsto u_1(x) = \sin(x)\,, \qquad x \mapsto u_2(x) = |x|\,, \qquad x \mapsto u_3(x) = \operatorname{sgn}(x)\,.$$

Problem 2. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Gegeben seien $\beta, f \in C(\mathcal{O})$. Betrachte das Problem: Finde $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} -u'' + \beta u' &= f && \text{auf } \mathcal{O}\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\mathcal{O}\,. \end{aligned}$$

Diskutieren Sie die Existenz einer schwachen Lösung, indem Sie Forderungen an β aufstellen.

Problem 3. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Sei $\mathbb{U}$ ein Hilbertraum, und $a : \mathbb{U}\times\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ bzw. $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ eine Bilinear- bzw. eine Linearform, die die in der Vorlesung formulierten Voraussetzungen des Lax-Milgram Lemmas erfüllen, sodaß folgendes Problem lösbar ist: Finde $u \in \mathbb{U}$, sodaß

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{U}\,.$$

Betrachte nun eine Finite-Elemente-Diskretisierung dieses Problems: Finde $u \in \mathbb{U}_h$, sodaß

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall\, v \in \mathbb{U}_h\,,$$

mit

$$\mathbb{U}_h := \left\{ v_h \in C(\overline{\mathcal{O}}) :\, v_h\big|_{(x_{n-1},x_n)} \in \mathcal{P}_1\big((x_{n-1},x_n)\big)\,, \quad 0 < x_1 < \ldots x_N < 1 \right\}.$$

Überprüfen Sie, ob die Finite-Elemente-Diskretisierung stets lösbar ist.

Problem 4. Wir wollen eine Finite-Elemente-Diskretisierung von **Problem 2.** für das spezielle $f \equiv 1$ betrachten: hierzu verwenden wir eine äquidistante Partitionierung $0 < x_1 < \ldots < x_4 < 1$ der Feinheit $h = \frac{1}{5}$ von $\mathcal{O} = (0,1)$.

Wie lautet das zu lösende LGS, und welche Eigenschaften hat die hier auftretende Matrix (in Abhängigkeit von β)?

Abgabe: 25.04.2019.