

9. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 25. Untersuchen Sie die von Neumann-Stabilität für das Zentrierte-Differenzen-Schema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

und für die Friedrichs-Methode

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n]}{\tau} = c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}.$$

Übungsaufgabe 26. Für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ benutzen Sie die Crank-Nicholson Methode

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right).$$

Untersuchen Sie den Wachstumsfaktor, die Stabilität und Ordnung des Schemas.

Übungsaufgabe 27. Untersuchen Sie den Wachstumsfaktor, die Stabilität und Ordnung der Crank-Nicholson Methode für die Schrödinger-Gleichung $u_t = iu_{xx}$. Zeigen Sie die Erhaltung der ℓ^2 -Norm:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^{n+1}|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^n|^2.$$

Übungsaufgabe 28. Weisen Sie nach, dass das Lax-Wendroff-Verfahren die Ordnung 2 besitzt und stabil ist für $|r| \leq 1$.

Besprechung in den Übungen am 22. Juni 2016.