Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 8. Juni 2016

8. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 23. Behandeln Sie die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $[0,\pi]$ mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x)$$

und mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

mittels Fourier-Reihen. Nehmen Sie dazu die exakte Lösung u als existent an und setzen Sie sie auf $[-\pi,0]$ *gerade* fort. Zeigen Sie insbesondere: Falls u_0 und v_0 reell sind, so ist auch u eine reelle Funktion.

Übungsaufgabe 24. Geben Sie den Abhängigkeitsbereich und die CFL-Bedingung für das Zentrierte-Differenzen-Schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

und für die Lax-Friedrichs-Methode

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n]}{\tau} = c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

an.

Programmieraufgabe 4. Weisen Sie durch geeignete Wahlen der Gitterweite h, der Schrittweite τ und der Wellengeschwindigkeit c die Instabilität des Leapfrog-Schemas angewendet auf die Wellengleichung

$$\begin{aligned}
\partial_{tt} u &= c^2 \partial_{xx} u,\\
u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi,\\
\partial_t u(x,0) &= v_0(x), \quad 0 \le x \le \pi,\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \quad \forall t > 0,
\end{aligned}$$

nach.

Besprechung in den Übungen am 15. Juni 2016.