Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 1. Juni 2016

7. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 20. (Crank-Nicolson-Verfahren)
Wir diskretisieren die lineare Wärmeleitungsgleichung im Raum mit finiten Element und in der Zeit mit der Mittelpunktsregel und erhalten somit das folgende Schema: Für gegebenes $u_0 \in V_h$ suche für $n = 0, 1, 2, \dots$ $u_{n+1} \in V_h$ mit

$$\Big((u_{n+1} - u_n)/\tau, v\Big) + a\Big((u_{n+1} + u_n)/2, v\Big) = \Big(f((t_{n+1} + t_n)/2), v\Big) \qquad \text{für alle} \quad v \in V_h \ .$$

(a) In jedem Schritt führt dieses Verfahren auf ein lineares Gleichungssystem im $\mathbf{R}^N$. Geben Sie dieses an.

(b) Leiten Sie mittels "Energieabschätzungen" eine Stabilitätsungleichung für das Verfahren her.

(c) Zeigen Sie damit für $n\tau \le T$ unter geeigneten Regularitätsannahmen die Fehlerabschätzungen

$$|u_n - u(t_n)| \le C\,(h^2 + \tau^2)$$

$$\left(\tau \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{u_{j+1} + u_j}{2} - u\Big(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\Big) \right\|^2 \right)^{1/2} \le C\,(h + \tau^2).$$

Übungsaufgabe 21. (a) Zeigen Sie durch Induktion nach j, dass für die Folge $y_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \dots$ gilt

$$\nabla^j y_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j ,$$

wobei $\nabla^j y_k := \nabla^{j-1} y_k - \nabla^{j-1} y_{k-1}$.

(b) Zeigen Sie damit für das BDF-Verfahren $\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\alpha(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j , \qquad \beta(\zeta) = \zeta^k.$$

Übungsaufgabe 22. Sei V ein Hilbert-Raum und sei $\hat{u}(\varphi)\colon [0, 2\pi] \to V$ eine stetige Funktion. Der n-te Fourier-Koeffizient ist gegeben durch $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi =: u_n \in V$ für $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Parseval Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\hat{u}(\varphi)\|^2 d\varphi.$$

Hinweis: Sie wissen, dass $(e^{in\varphi})_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(0, 2\pi)$ eine Hilbertbasis ist.

Programmieraufgabe 3. Sei $\Omega := (0, 2\pi)$ und $I := (0, 1]$. Wir möchten folgende partielle Differentialgleichung numerisch lösen: Suche $u\colon \overline{\Omega \times I} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times I, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times I, \\ u(x, 0) = \sin(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei der Laplace Operator bzgl. der räumlichen Variable genommen wird. Dafür diskretisieren wir im Raum mit linearen finiten Elemente und in der Zeit mit BDF-2. Die Richtigkeit des Programmes wird mit Fehlerplots überprüft.

Machen Sie sich klar, dass die analytische Lösung des Problems durch $u(x, t) = \sin(x)e^{-t}$ gegeben ist. Für ein gegebenes $h > 0$, z.B. $h_N := \frac{2\pi}{N+1}$, diskretisieren wir Ω äquidistant. Die Raumdiskretisierung von (1) lautet dann

$$\begin{cases} M\dot{u}_h(t) + Au_h(t) = 0, \\ u_{h,j}(0) = \sin(j \cdot h_N), \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{2}$$

wobei $M = h \cdot tridiag(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ und $A = \frac{1}{h} \cdot tridiag(-1, 2, -1)$.

Die BDF-2 Diskretisierung von (2) lautet

$$\frac{3}{2}Mu_h^{n+1} - 2Mu_h^n + \frac{1}{2}Mu_h^{n-1} + \tau Au_h^{n+1} = 0, \tag{3}$$

wobei man u_h^n und u_h^{n-1} kennen muss. Überlegen Sie sich, was eine sinnvolle Wahl von u_h^1 wäre, aber zur Vereinfachung sollen Sie die exakte Lösung benutzen.

Für $h \in \{\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{16}\}$ berechnen sie die Lösung von (3) für

$$\tau \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512} \right\}.$$

Der Fehler in der L^2-Norm von (1) soll für jedes h mit seinen τ als eine Linie dargestellt werden. Plotten sie drei Linien doppelt logarithmisch in einem Schaubild. Machen Sie plausibel warum Ihr Programm richtig ist anhand des Plots.

Besprechung in den Übungen am 8. Juni 2016.