

5. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 13. Gegeben sei die parabolische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - a_0(x)u && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T) \\ u &= u_0 && \text{in } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

Hierbei sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^d mit stückweise stetig differenzierbarem Rand Γ . Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, a_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig,

$$\exists \alpha_0 \geq 0 : \forall x \in \Omega : a_0(x) > \alpha_0,$$

und die Matrizen $(a_{ij}(x))_{ij}$ seien symmetrisch und auf Ω gleichmäßig positiv definit, d.h.

$$\exists \alpha_1 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j a_{ij}(x) \geq \alpha_1 \xi^T \xi.$$

Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an und weisen Sie nach, dass klassische Lösungen, d.h. $u \in C^2$, auch schwache Lösungen sind.

Übungsaufgabe 14. Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, D ein zusammenhängendes Gebiet, das im Innern die Eigenwerte von A enthält und Γ eine Kurve die gegen den Uhrzeigersinn den Rand von D parametrisiert. Zeigen Sie:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Resolvente in eine Neumann'sche Reihe und benutzen Sie dann eine Verallgemeinerung der Cauchy'sche Integralformel für höhere Ableitungen.

Übungsaufgabe 15. Betrachten Sie das Gelfand-Tripel

$$V \xhookrightarrow{\iota} H \xrightarrow{r_H} H' \xhookrightarrow{\iota'} V'$$

mit Hilberträumen $(V, \|\cdot\|)$, $(H, |\cdot|)$ und $(V', \|\cdot\|_{V'})$. Dabei ist ι eine dichte stetige lineare Einbettung und r_H der Riesz-Isomorphismus. Geben Sie ι' an und zeigen Sie, dass es sich ebenfalls um eine dichte stetige Einbettung handelt.

Besprechung in den Übungen am 25. Mai 2016.