

6. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 17: (Crank-Nicolson-Verfahren)

Eine Finite-Element-Diskretisierung im Raum und Verwendung der Mittelpunktsregel zur Zeitdiskretisierung eines parabolischen Problems ergibt das Schema: Für $n = 0, 1, 2, \dots$ suche $u_{n+1} \in V_h$ mit

$$\left((u_{n+1} - u_n)/\tau, v \right) + a \left((u_{n+1} + u_n)/2, v \right) = \left(f((t_{n+1} + t_n)/2), v \right) \quad \text{für alle } v \in V_h .$$

- (a) In jedem Schritt führt dieses Verfahren auf ein lineares Gleichungssystem im \mathbf{R}^N . Geben Sie dieses an.
- (b) Leiten Sie mittels “Energieabschätzungen” eine Stabilitätsungleichung für das Verfahren her.
- (c) Zeigen Sie damit für $n\tau \leq T$ unter geeigneten Regularitätsannahmen die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} |u_n - u(t_n)| &\leq C(h^2 + \tau^2) \\ \left(\tau \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{u_{j+1} + u_j}{2} - u\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} &\leq C(h + \tau^2). \end{aligned}$$

Besprechung in den Übungen am 05.06.2012

Die Übungen finden jeweils dienstags von 16–18 Uhr im Raum S9 statt.