Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.05.2012

3. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay + g(t, y) \ ,$$

wobei $\langle Av, v\rangle \le \mu \|v\|^2$ für alle $v \in \mathbf{R}^d$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle. Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie: Falls $\mu + L \le 0$, so sind sowohl die Differentialgleichung wie das Verfahren kontraktiv.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x)u \qquad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$ und Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ für $x \in \Omega$. Hierbei sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ mit stückweise stetig differenzierbarem Rand Γ. Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, a_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ seien stetig, und die Matrizen $(a_{ij}(x))$ seien symmetrisch und auf Ω gleichmäßig positiv definit.

Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an und weisen Sie nach, daß klassische Lösungen auch schwache Lösungen sind.

Aufgabe 10:

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung $\partial u/\partial t = \Delta u$ auf $\Omega \times (0, T)$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen $\partial u/\partial n = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$ und Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = u_0$. Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an. Was ist hier der Grundraum V, wie sieht die zugehörige Bilinearform auf V aus? Diese Bilinearform ist nicht V-elliptisch, erfüllt aber die *Gårding'sche Ungleichung*

$$a(v, v) \ge \alpha \|v\|^2 - c|v|^2 \qquad \text{für alle } v \in V$$

mit $\alpha > 0$, $c \ge 0$. Hierbei ist $\|\cdot\|$ die Norm von V und $|\cdot|$ jene von $H = L^2(\Omega)$. Zeigen Sie diese Ungleichung und geben Sie α und c an.

Aufgabe 11:

Überlegen Sie sich: Falls die Bilinearform in der schwachen Formulierung eines parabolischen Anfangs-Randwertproblems anstelle der V-Elliptizität die Gårding'sche Ungleichung erfüllt, so gelten alle Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen wie in der Vorlesung. Die Abschätzungen für die Lösung ändern sich nur durch einen zusätzlichen Faktor e^{ct} auf den rechten Seiten.

<u>Hinweis:</u> Formulieren Sie ein äquivalentes Problem für $w(x, t) = e^{-ct}u(x, t)$.

Besprechung in den nächsten Übungen