Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.04.2012

2. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten: $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ für $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{(mit Ausnahme der Pole)} .$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für das Runge-Kutta-Verfahren (Lobatto IIIC) mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

die Stabilitätsfunktion $R(z)$. Weisen Sie zudem die A-Stabilität des Verfahrens nach.

Aufgabe 6: (Umformulierung der nichtlinearen Gleichungssysteme)

Um den Einfluss von Rundungsfehlern zu reduzieren definiert man $Z_i = Y_i - y_0$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} Z &= Y - 1 \otimes y_0 = h(A \otimes I)F(Y) \\ y_1 &= y_0 + (d^T \otimes I)Z, \qquad \text{wobei} \quad d^T = b^T A^{-1}. \end{aligned}$$

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung) und formulieren Sie hierfür das vereinfachte Newton-Verfahren.

Zeigen Sie, dass bei Radau-Verfahren $d = e_s$ gilt, also $y_1 = y_0 + Z_s$.

Aufgabe 7: (Abbruchkriterium für die Newton-Iteration, Auswertung der Jacobi-Matrix)

Das vereinfachte Newton-Verfahren konvergiert in der Regel linear: $\|\Delta Z^{(k+1)}\| \leq \theta \|\Delta Z^{(k)}\|$ mit einem θ, für das hoffentlich $\theta < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass für den Fehler im $(k+1)$-ten Schritt

$$\|Z^{(k+1)} - Z\| \leq \frac{\theta}{1-\theta} \|\Delta Z^{(k)}\|$$

gilt (Hinweis: Dreiecksungleichung auf

$$Z^{(k+1)} - Z = (Z^{(k+1)} - Z^{(k+2)}) + (Z^{(k+2)} - Z^{(k+3)}) + \ldots$$

anwenden). Man kann θ nun durch $\theta_k = \|\Delta Z^{(k)}\| / \|\Delta Z^{(k-1)}\|$ schätzen. Da der Iterationsfehler nicht größer als der lokale Fehler und dieser $\approx$ `tol` sein soll, stoppt man die Newton-Iteration falls

$$\eta_k \|\Delta Z^{(k)}\| \leq \kappa \mathtt{tol}, \qquad \eta_k = \frac{\theta_k}{1-\theta_k}.$$

Damit man bereits nach dem ersten Schritt stoppen kann, verwendet man für $k = 0$ die Größe $\eta_0 = \max\{\eta_{old}, eps\}$, wobei eps die Maschinengenauigkeit ist. Eine gute Wahl für κ liegt bei 0.01 bis 0.1. Sie resultiert aus numerischen Tests. Zur Verbesserung der Effizienz begrenzt man die Anzahl der Newton-Schritte auf $k_{\max} = 7$ bis 10.

Während dieser $k_{\max}$ Schritte wird die Berechnung unterbrochen und die Schrittweite h verkleinert (z.B. auf $h := h/2$), wenn es ein k mit $\theta_k \geq 1$ gibt (Divergenz) oder falls

$$\frac{\theta_k^{k_{\max}-k}}{1-\theta_k} \|\Delta Z^{(k)}\| > \kappa \cdot \texttt{tol}.$$

Überlegen Sie sich, dass die linke Seite dieses Ausdrucks eine grobe Schätzung des Fehlers nach $k_{\max} - 1$ Iterationen ist.

Tritt Konvergenz nach einem Schritt ein oder ist das letzte θ_k sehr klein, z.B. $\theta_k < 10^{-3}$, so berechnet man im nächsten Schritt keine neue Jacobi-Matrix sondern rechnet mit der aktuellen weiter.

Besprechung in der nächsten Übungen.