Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.07.2012

11. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 29:

Betrachten Sie den Impulsoperator $p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$ und den Operator q_k gegeben durch $(q_k\psi)(x) = x_k\psi(x)$. Zeigen Sie:

(a) Für die Fourier-Transformierte gilt $\widehat{p_k\psi}(\xi) = \xi_k\widehat{\psi}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(b) $\langle p_k\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$
(c) $\|p_k\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$
(d) $i[p_k, q_k]\psi = \psi$

Aufgabe 30:

Betrachten Sie die komplexe Gauß-Funktion

$$\psi(x) = \exp(-a|x-\bar{q}|^2 + i\bar{p}(x-\bar{q}) + c), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit komplexen Parametern a ($\operatorname{Re} a > 0$) und c ($\operatorname{Re} c$ so, dass $\|\psi\|_{L^2} = 1$) und mit reellen Parametervektoren $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie (wenn Sie wollen nur für $n = 1$):

(a) Die Fourier-Transformierte $\widehat{\psi}(\xi)$ ist wiederum eine komplexe Gauß-Funktion. Welche?
(b) $\langle q_k\rangle_\psi = \bar{q}_k, \quad \langle p_k\rangle_\psi = \bar{p}_k \quad (k = 1, \ldots, n)$.
(c) Für reelles a gilt Gleichheit in der Unschärferelation: $\Delta p_k \Delta q_k = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 31:

Zeigen Sie: Sind die Anfangsdaten der freien Schrödinger-Gleichung $i\partial\psi/\partial t = -\frac{1}{2m}\Delta\psi$ eine komplexe Gauß-Funktion (wie in der vorherigen Aufgabe), so bleibt die Lösung zu allen Zeiten eine komplexe Gauß-Funktion mit $\bar{p}(t) = \bar{p}(0), \bar{q}(t) = \bar{q}(0) + t\bar{p}(t)/m$ (d.h., Erwartungswerte von Ort und Impuls gemäß Newton).

Hinweis: Setzen Sie $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ wie angegeben an, und bestimmen Sie dann a und c aus gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Sie aus der Schrödinger-Gleichung herleiten.

Besprechung in den Übungen am 10.07.2010