Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.06.2012

10. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

In den folgenden Aufgaben wird die Advektionsgleichung $u_t = cu_x$ für $x > 0, t > 0$ mit $c > 0$ diskretisiert (Ausströmrand bei $x = 0$). Es werden die numerischen Randbedingungen

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = c\frac{u_1^n - u_0^n}{h} \tag{1}$$

und

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{2\tau} = c\frac{u_1^n - u_0^n}{h} \tag{2}$$

betrachtet.

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass das Lax-Wendroff-Verfahren mit der numerischen Randbedingung (2) instabil ist.

Aufgabe 27:

Bestimmen Sie den Phasenfehler des Lax-Wendroff-Verfahrens.

Aufgabe 28:

Betrachten Sie für das Leapfrog-Verfahren mit der numerischen Randbedingung (1) die zugehörigen Symbole

$$a(z,\xi) = z - z^{-1} - r(\xi - \xi^{-1}),$$
$$b(z,\xi) = z - 1 - r(\xi - 1)$$

(mit der Courant-Zahl $r = c\tau/h$). Zeigen Sie:
a) Für $|z| > 1$ gibt es genau eine Nullstelle $\xi_1(z)$ von $a(z,\xi) = 0$ vom Betrag kleiner 1. Für diese gilt

$$\lim_{z\to 1} \xi_1(z) = -1.$$

b) Die Entwicklung

$$\frac{1}{b(z,\xi_1(z))} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad |z| > 1$$

hat eine beschränkte Koeffizientenfolge (b_n). Das Verfahren ist daher stabil.
c) Für die Randbedingung (2) wächst hingegen die entsprechende Koeffizientenfolge (b_n) geometrisch an. Wie hängt dies mit der Instabilität des Verfahrens zusammen?

Programmieraufgabe 4 :

Programmieren Sie die oben angesprochenen Verfahren, und testen Sie sie mit Anfangsdaten $u^0(x) = \exp(-(x-4)^2)$. Für die Rechnung benötigen Sie einen künstlichen rechten Rand, etwa bei $x = 10$. Was ist dort eine passende numerische Randbedingung?

Besprechung in den Übungen am 03.07.2012
Die Übungen finden jeweils dienstags von 16–18 Uhr im Raum S9 statt.