

8. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

Aufgabe 22:

Für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ benutzen Sie die Crank-Nicholson Methode

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right).$$

Untersuchen Sie den Wachstumsfaktor, die Stabilität und Ordnung des Schemas.

Aufgabe 23:

Untersuchen Sie den Wachstumsfaktor, die Stabilität und Ordnung der Crank-Nicholson Methode für die Schrödinger-Gleichung $u_t = iu_{xx}$. Zeigen Sie die Erhaltung der ℓ^2 -Norm:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^{n+1}|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^n|^2.$$

Aufgabe 24:

Ist das Anfangswertproblem ($x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$)

$$u_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_x + Bu, \quad u|_{t=0} = u_0$$

mit einer konstanten Matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wohlgestellt?

Aufgabe 25:

(a) Stellen Sie sinnvolle Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = 1$ für das hyperbolische System

$$u_t = A(x)u_x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(b) Diskutieren Sie den Fall der Wellengleichung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Besprechung in den Übungen am 14.06.2010

Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.