

## 6. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

### Aufgabe 17:

Es sei  $V$  ein separabler Hilbert-Raum mit der Norm  $\|\cdot\|$  und dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ .

Zeigen Sie: Für eine Folge von Fourier-Koeffizienten  $\{u_n\}_n \subset V$  gegeben durch

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \hat{u}(\varphi) d\varphi, \quad \hat{u}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{in\varphi}$$

gilt die Parseval'sche Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\hat{u}(\varphi)\|^2 d\varphi.$$

Hinweis: In einem separablen Hilbert-Raum existiert eine Orthonormalbasis.

### Aufgabe 18: (Crank-Nicolson-Verfahren)

Eine Finite-Element-Diskretisierung im Raum und Verwendung der Mittelpunktsregel zur Zeitdiskretisierung eines parabolischen Problems ergibt das Schema: Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  suche  $u_{n+1} \in V_h$  mit

$$\left( (u_{n+1} - u_n)/\tau, v \right) + a \left( (u_{n+1} + u_n)/2, v \right) = \left( f((t_{n+1} + t_n)/2), v \right) \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

- In jedem Schritt führt dieses Verfahren auf ein lineares Gleichungssystem im  $\mathbf{R}^N$ . Geben Sie dieses an.
- Leiten Sie mittels "Energieabschätzungen" eine Stabilitätsungleichung für das Verfahren her.
- Zeigen Sie damit für  $n\tau \leq T$  unter geeigneten Regularitätsannahmen die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} |u_n - u(t_n)| &\leq C(h^2 + \tau^2) \\ \left( \tau \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{u_{j+1} + u_j}{2} - u\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} &\leq C(h + \tau^2). \end{aligned}$$

### Programmieraufgabe 3 :

Realisieren Sie in Ihrer Implementierung des Radau5-Verfahrens die Schrittweitensteuerung aus Aufgabe 12, und testen Sie das Programm wiederum an der van der Pol-Gleichung.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert  $y_1(0) = 2$ ,  $y_2(0) = -0.66$  für verschiedene Werte von  $\varepsilon$  und  $tol$ .

### **Besprechung in den Übungen am 31.05.2010**

Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.