Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.05.2010

4. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

Aufgabe 12: (Schrittweitensteuerung)

Zur Schrittweitensteuerung verwendet man ein eingebettetes Verfahren

$$\widehat{y}_1 = y_0 + h\left(\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} \widehat{b}_j Y_j'\right) = y_0 + \left(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} \widehat{d}_j Z_j\right)$$

mit niedrigerer Ordnung, bei Radau-Verfahren der Ordnung s. Damit gilt

$$\widehat{y}_1 - y_1 = h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} h(\widehat{b}_j - b_j) Y_j' = \left(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} (\widehat{d}_j - d_j) Z_j\right)$$

Den Fehler läßt sich dann durch $err = \widehat{y}_1 - y_1$ schätzen. Zeigen Sie, $\|err\| = Ch^{s+1} + O(h^{s+2})$.

Zeigen Sie: Wendet man diese Fehlerschätzung bei der Testgleichung $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, für $h\lambda \to \infty$ an, so verhält sich die Fehlerschätzung wie $\widehat{b}_0 h\lambda y_0$ und ist damit für steife Differentialgleichungen ungeeignet. Setzt man jedoch $err = (I - h\widehat{b}_0 J)^{-1}(\widehat{y}_1 - y_1)$, so geht $err \to -y_0$ für $h\lambda \to \infty$. Im ersten und nach jedem verworfenen Schritt setzt man auf Kosten einer zusätzlichen Funktionsauswertung

$$\widehat{err} = (I - h\widehat{b}_0 J)^{-1}\left(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0 + err) + \sum_{j=1}^{s} (\widehat{d}_j - d_j) Z_j\right).$$

Zeigen Sie $\widehat{err} \to 0$ für $h\lambda \to \infty$, ebenso wie die numerische Lösung.

Für den Fehler im n-ten Schritt (also zur Zeit t_{n+1}) gilt $\|err_{n+1}\| = C_n h_n^{s+1}$. Zeigen Sie: Unter der Annahme $C_{n+1} \approx C_n$ ergibt sich aus einer Schätzung für err_{n+1} und der Forderung $\|err_{n+1}\| \approx 1$, die Schrittweite für den nächsten Schritt als $h_{new} = fac \cdot h_{old} \|err_{n+1}\|^{-1/(s+1)}$ mit der gewichteten Norm

$$\|err_{n+1}\| = \sqrt{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{err_{n+1,i}}{sc_i}\right)^2}, \qquad sc_i = Atol_i + \max\{|y_{n,i}|, |y_{n+1,i}|\} Rtol_i.$$

Eine realistischere Annahme ist $C_{n+1}/C_n \approx C_n/C_{n-1}$. Zeigen Sie, daß aus $C_{n+1} h_{new}^{s+1} = 1$ folgt

$$h_{new} = fac \cdot h_n \left(\frac{1}{\|err_{n+1}\|}\right)^{1/(s+1)} \cdot \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(\frac{\|err_n\|}{\|err_{n+1}\|}\right)^{1/(s+1)}.$$

Aufgabe 13:

Zeigen Sie unter den Voraussetzungen der Vorlesung: Die Lösung $u(t) \in V$ des homogenen parabolischen Problems $u' + Au = 0$ in V', $u(0+) = u_0$ in H erfüllt für alle $t > 0$

$$\|u(t)\| \le \frac{C_1}{\sqrt{t}} |u_0|,$$

$$Au(t) \in H \quad \text{und} \quad |Au(t)| \le \frac{C_2}{t} |u_0|$$

mit von t und u_0 unabhängigen Konstanten C_1, C_2.

Aufgabe 14:

Für die Zeitableitungen gilt für $t > 0$ und $k = 1, 2, 3, \cdots$

$$|u^{(k)}(t)| \leq \frac{C_k}{t^k} |u_0|.$$

Besprechung in den Übungen am 10.05.2010

Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.