

3. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

Aufgabe 8:

Formulieren Sie Schwierigkeiten beim Verständnis des Vorlesungsstoffs dieser Woche. Sollten keine auftreten, beweisen Sie die in der Vorlesung als Übung gekennzeichneten Aussagen.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$ und Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ für $x \in \Omega$. Hierbei sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^d mit stückweise stetig differenzierbarem Rand Γ . Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, a_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig, und die Matrizen $(a_{ij}(x))$ seien symmetrisch und auf Ω gleichmäßig positiv definit.

Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an und weisen Sie nach, daß klassische Lösungen auch schwache Lösungen sind.

Aufgabe 10:

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung $\partial u / \partial t = \Delta u$ auf $\Omega \times (0, T)$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen $\partial u / \partial n = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$ und Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = u_0$. Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an. Was ist hier der Grundraum V , wie sieht die zugehörige Bilinearform auf V aus? Diese Bilinearform ist nicht V -elliptisch, erfüllt aber die *Gårding'sche Ungleichung*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 - c|v|^2 \quad \text{für alle } v \in V$$

mit $\alpha > 0$, $c \geq 0$. Hierbei ist $\|\cdot\|$ die Norm von V und $|\cdot|$ jene von $H = L^2(\Omega)$. Zeigen Sie diese Ungleichung und geben Sie α und c an.

Aufgabe 11:

Überlegen Sie sich: Falls die Bilinearform in der schwachen Formulierung eines parabolischen Anfangs-Randwertproblems anstelle der V -Elliptizität die Gårding'sche Ungleichung erfüllt, so gelten alle Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen wie in der Vorlesung. Die Abschätzungen für die Lösung ändern sich nur durch einen zusätzlichen Faktor e^{ct} auf den rechten Seiten.

Hinweis: Formulieren Sie ein äquivalentes Problem für $w(x, t) = e^{-ct}u(x, t)$.

Besprechung in den Übungen am 03.05.2010

Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.