Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.04.2010

2. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten: $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ für $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{(mit Ausnahme der Pole)} .$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay + g(t, y) \ ,$$

wobei $\langle Av, v\rangle \le \mu \|v\|^2$ für alle $v \in \mathbf{R}^d$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle. Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie: Falls $\mu + L \le 0$, so sind sowohl die Differentialgleichung wie das Verfahren kontraktiv.

Aufgabe 6: (Umformulierung der nichtlinearen Gleichungssysteme)

Um den Einfluss von Rundungsfehlern zu reduzieren definiert man $Z_i = Y_i - y_0$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} Z &= Y - 1 \otimes y_0 = h(A \otimes I)F(Y) \\ y_1 &= y_0 + (d^T \otimes I)Z, \qquad \text{wobei} \quad d^T = b^T A^{-1}. \end{aligned}$$

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung) und formulieren Sie hierfür das vereinfachte Newton-Verfahren.

Zeigen Sie, dass bei Radau-Verfahren $d = e_s$ gilt, also $y_1 = y_0 + Z_s$.

Aufgabe 7: (Abbruchkriterium für die Newton-Iteration, Auswertung der Jacobi-Matrix)

Das vereinfachte Newton-Verfahren konvergiert in der Regel linear: $\|\Delta Z^{(k+1)}\| \le \theta \|\Delta Z^{(k)}\|$ mit einem θ, für das hoffentlich $\theta < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass für den Fehler im $(k+1)$-ten Schritt

$$\|Z^{(k+1)} - Z\| \le \frac{\theta}{1-\theta} \|\Delta Z^{(k)}\|$$

gilt (Hinweis: Dreiecksungleichung auf

$$Z^{(k+1)} - Z = (Z^{(k+1)} - Z^{(k+2)}) + (Z^{(k+2)} - Z^{(k+3)}) + \ldots$$

anwenden). Man kann θ nun durch $\theta_k = \|\Delta Z^{(k)}\| / \|\Delta Z^{(k-1)}\|$ schätzen. Da der Iterationsfehler nicht größer als der lokale Fehler und dieser $\approx$ `tol` sein soll, stoppt man die Newton-Iteration falls

$$\eta_k \|\Delta Z^{(k)}\| \le \kappa \texttt{tol}, \qquad \eta_k = \frac{\theta_k}{1-\theta_k}.$$

Damit man bereits nach dem ersten Schritt stoppen kann, verwendet man für $k = 0$ die Größe $\eta_0 = \max\{\eta_{old}, eps\}$, wobei *eps* die Maschinengenauigkeit ist. Eine gute Wahl für κ liegt bei 0.01 bis 0.1. Sie resultiert aus numerischen Tests. Zur Verbesserung der Effizienz begrenzt man die Anzahl der Newton-Schritte auf $k_{\max} = 7$ bis 10.

Während dieser $k_{\max}$ Schritte wird die Berechnung unterbrochen und die Schrittweite h verkleinert (z.B. auf $h := h/2$), wenn es ein k mit $\theta_k \geq 1$ gibt (Divergenz) oder falls

$$\frac{\theta_k^{k_{\max}-k}}{1-\theta_k} \|\Delta Z^{(k)}\| > \kappa \cdot \mathtt{tol}.$$

Überlegen Sie sich, dass die linke Seite dieses Ausdrucks eine grobe Schätzung des Fehlers nach $k_{\max} - 1$ Iterationen ist.

Tritt Konvergenz nach einem Schritt ein oder ist das letzte θ_k sehr klein, z.B. $\theta_k < 10^{-3}$, so berechnet man im nächsten Schritt keine neue Jacobi-Matrix sondern rechnet mit der aktuellen weiter.

Besprechung in den Übungen am 26.04.2010
Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.